GUIDO FUBINI

IL PARALLELISMO DI CLIFFORD

NEGLI

SPAZII ELLITTICI

PISA

TIPOGRAFIA SUCCESSORI FF. NISTRI

1900

GUIDO FUBINI

IL PARALLELISMO DI CLIFFORD

NEGLI

SPAZII ELLITTICI

TESI DI LAUREA.

PISA

TIPOGRAFIA SUCCESSORI FF. NISTRI

1900

Questo lavoro studia il parallelismo negli spazii a curvatura costante positiva, importante elemento della geometria metrica di tali spazii definito per la prima volta da Clifford [1]). Si introducono perciò nuove coordinate di retta (parametri di scorrimento) di cui si danno svariati significati geometrici, e per cui si trova un algoritmo semplicissimo che permette di trattarle in modo rapido e sicuro, mentre senza di esso i calcoli riuscirebbero estremamente lunghi e noiosi.

Si può quindi dare una dimostrazione del principio di dualità senza ricorrere a considerazioni dell'assoluto, definire per la prima volta l'angolo di due rette sghembe, ecc. L'applicazione di questi principii alla teoria delle curve, mentre suggerisce per esse l'introduzione di un nuovo elemento: " la torsione di Clifford ", dimostra in nuovo modo e completa un teorema del prof. Bianchi [2]); una modificazione delle formule di Frenet per lo spazio curvo conduce a confronti, a mio parere notevoli, con lo spazio piano e a nuovi teoremi. L'applicazione della teoria delle parallele allo studio delle congruenze dà in modo diretto le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le forme quadratiche differenziali definenti una congruenza siano compatibili, dà immediatamente un criterio per riconoscere

---

[1]) V. p. es. Klein. *Nicht-euklidische Geometrie.*

[2]) Bianchi. *Ann. di Matem.* 1896, pag. 103. Noi indicheremo questa memoria con A.

se una congruenza è W, appena ne siano date le forme fondamentali e permette infine di stabilire alcuni nuovi risultati per la densità di una congruenza.

Applicando questi teoremi alla teoria delle superficie, si ottengono nuove interpretazioni geometriche della curvatura assoluta e della torsione geodetica, si riconduce la teoria delle superficie nello spazio curvo allo studio di quelle rappresentazioni della sfera euclidea in sè stessa, per cui parti corrispondenti hanno area uguale. Si possono quindi generalizzare alcune formule ben note dello spazio euclideo per la teoria della superficie e dei sistemi tripli ortogonali, col cui aiuto si studiano tra l'altro quelle congruenze che per ogni deformazione della superficie di partenza, cui i raggi della congruenza si immaginino invariabilmente uniti, si dispongono sempre in ∞^1 rigate di Clifford, e si trovano infine curiosi risultati per l'angolo che formano elementi lineari corrispondenti sulla superficie e sulla sua immagine piana.

L'applicazione di questi risultati alla teoria della superficie W conduce, tra l'altro, allo studio di notevoli coppie di elementi sferici, studio che si può anche interpretare nella metrica euclidea e e che dà un significato geometrico (sebbene non semplice) della trasformazione di Lie per le superficie pseudosferiche, mentre risolve in nuovo modo il problema di determinare sulla sfera euclidea quei reticoli che la dividono in parallelogrammi infinitesimi equivalenti.

Lo studio della immagine Riemanniana di rette parallele porta a una nuova proprietà caratteristica delle superficie di Demartres (isocicliche) [1], proprietà che mentre si può interpretare con la sola metrica euclidea, conduce a nuove proprietà delle superficie isocicliche e delle rigate isoterme (luogo delle binormali di una curva a torsione costante) [2]) degli spazii a curvatura costante.

---

[1]) Demartres. *Annales de l'École Normale Superieure,* T. 4 (1887).
[2]) Bianchi. (A).

PRIME FORMULE

§ 1. Noi sappiamo che nello spazio ellittico esistono certi movimenti speciali, per cui è costante la distanza tra la posizione iniziale e la finale di un punto qualunque, e che ricevettero il nome di scorrimenti. A questi movimenti corrispondono nello spazio euclideo (dove si immagini rappresentato geodeticamente lo spazio curvo) le omografie biassiali che hanno per assi due generatrici d'una medesima serie rigata dell'assoluto e che fanno perciò scorrere su sè stesse le generatrici dell'altra serie rigata. E, conformemente all'esistenza di due serie rigate su una quadrica, gli scorrimenti di uno spazio curvo si scindono in due sistemi affatto distinti: gli scorrimenti destrorsi e gli scorrimenti sinistrorsi.

Da questi speciali movimenti, Clifford partì per definire il parallelismo di rette in uno spazio curvo; e noi ora daremo alcune proprietà fondamentali delle rette parallele, facilmente deducibili le une dalle altre e di cui ciascuna può servire come definizione di rette parallele. Diremo dunque con Clifford che due o più rette sono parallele, quando

α) uniscono le posizioni iniziali e finali dei punti di un sistema rigido relative a uno scorrimento

oppure quando

β) si appoggiano alla medesima coppia di generatrici sghembe dell'assoluto

oppure quando

γ) sono esse stesse la posizione iniziale e la posizione finale di una retta sottoposta a uno scorrimento.

L'esistenza di due specie di scorrimenti dimostra l'esistenza di due specie di rette parallele: parallele destrorse e parallele sinistrorse; osserviamo però che da un solo scorrimento noi possiamo dedurre tanto parallele destrorse, quanto sinistrorse; e ciò secondo che ci serviamo della generazione α) o della generazione γ) di rette parallele.

Noi riporteremo qui le formule definenti uno scorrimento, nelle quali supporremo, come si farà sempre d'ora in poi, uguale a $+1$ la curvatura dello spazio ambiente, indicheremo con (x_i) e (x'_i) le coordinate di Weierstrass della posizione iniziale e della posizione finale di uno stesso punto, e indicheremo con A, B, C, D e con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ otto costanti legate dalle relazioni

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

Avremo per scorrimenti di prima specie [1]):

$$(1) \qquad \begin{cases} x'_1 = A x_1 - B x_2 - C x_3 - D x_4 \\ x'_2 = B x_1 + A x_2 - D x_3 + C x_4 \\ x'_3 = C x_1 + D x_2 + A x_3 - B x_4 \\ x'_4 = D x_1 - C x_2 + B x_3 + A x_4 \end{cases}$$

per scorrimenti di seconda specie

$$(2) \qquad \begin{cases} x'_1 = \alpha x_1 - \beta x_2 - \gamma x_3 - \delta x_4 \\ x'_2 = \beta x_1 + \alpha x_2 + \delta x_3 - \gamma x_4 \\ x'_3 = \gamma x_1 - \delta x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 \\ x'_4 = \delta x_1 + \gamma x_2 - \beta x_3 + \alpha x_4 . \end{cases}$$

§. 2. Con le coordinate di Weierstrass di punto e di piano, una retta (geodetica) si definisce dando le coordinate (x_i) di un suo punto

---

[1]) Bianchi (A).

qualunque e le coordinate (ξ_i) piano normale in (x_i) alla retta stessa; quindi in una maniera che, sebbene sia molto comoda in alcuni studii, pure è tutt'altro che simmetrica. È principio fondamentale del presente lavoro l'introduzione di un nuovo sistema di coordinate, che, come spero, apparirà per le sue applicazioni assai appropriato alla natura dello spazio ellittico.

Sia dunque una retta definita al modo di Weierstrass, e ne siano (x_i) e (ξ_i) due punti coniugati $\left(\text{distanti } \frac{\pi}{2}\right)$ tali cioè $\sum_{i=1}^{4} x_i \xi_i = 0$. Di scorrimenti che portino il punto (x_i) nel punto (ξ_i) ne abbiamo uno destrorso e uno sinistrorso; e, indicando con A, B, C, D le costanti relative all'uno e con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ le costanti relative all'altro, sarà intanto

$$A = \alpha = 0$$

perchè

$$\sum x \xi = 0$$

e quindi

$$B^2 + C^2 + D^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1 .$$

Noi assumeremo le $B, C, D, \beta, \gamma, \delta$ (che subito calcoleremo) come coordinate di una retta nello spazio ellittico e daremo loro il nome di "*parametri di scorrimento*" della retta stessa. Essi, si vede subito, saranno indipendenti dalla coppia di punti (x_i), (ξ_i) coniugati scelti sulla retta.

Osserviamo intanto che una retta è individuata, appena ne siano dati i parametri di scorrimento (e lo dimostreremo del resto effettivamente col calcolo); infatti essi definiscono due scorrimenti di specie diversa che lasciano fissa la retta, e quindi definiscono insieme le quattro generatrici dell'assoluto cui essa si appoggia, ciò che basta a individuare la retta insieme alla sua retta polare; questa indeterminazione, che può anche essere utile quando si studiino insieme due figure polari, si toglierà più sotto con considerazioni di segni.

Per il calcolo effettivo dei sei parametri di scorrimento si osservi

che le (1) diventano per noi

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_1 = -Bx_2 - Cx_3 - Dx_4 \\ \xi_2 = Bx_1 + Cx_4 - Dx_3 \\ \xi_3 = -Bx_4 + Cx_1 + Dx_2 \\ \xi_4 = Bx_3 - Cx_2 + Dx_1 . \end{cases}$$

Risolvendo, ricordando le $\sum x^2 = \sum \xi^2 = 1$, $\sum x\xi = 0$, si ha

$$(4)\quad \begin{cases} B = \xi_2 x_1 - x_2 \xi_1 + \xi_4 x_3 - x_4 \xi_3 \\ C = \xi_2 x_4 - \xi_4 x_2 + \xi_3 x_1 - x_3 \xi_1 \\ D = \xi_3 x_2 - \xi_2 x_3 + \xi_4 x_1 - x_4 \xi_1 \end{cases}$$

legate appunto dalla

$$(5)\quad D^2 + B^2 + C^2 = 1$$

Analogamente si ha

$$(3')\quad \begin{cases} \xi_1 = -\beta x_2 - \gamma x_3 - \delta x_4 \\ \xi_2 = \beta x_1 + \delta x_3 - \gamma x_4 \\ \xi_3 = \gamma x_1 - \delta x_2 + \beta x_4 \\ \xi_4 = \delta x_1 + \gamma x_2 - \beta x_3 \end{cases}$$

donde si ricava

$$(4')\quad \begin{cases} \beta = \xi_3 x_4 - \xi_4 x_3 + \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2 \\ \gamma = \xi_4 x_2 - \xi_2 x_4 + \xi_3 x_1 - \xi_1 x_3 \\ \delta = \xi_4 x_1 - \xi_1 x_4 + \xi_2 x_3 - \xi_3 x_2 \end{cases}$$

con la

$$(5')\quad \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1$$

Prese le (4) e le (4′) come formule definenti le $B, C, D, \beta, \gamma, \delta$ le (3) e le (3′) danno le coordinate (ξ_i) del piano normale nel punto (x_i) alla nostra retta, appena sia noto questo punto (x_i).

È facile ora riconoscere ciò che distingue i paramenti di scorrimento di due rette polari. Prendiamo per es. la retta normale nel punto (1, 0, 0, 0) al piano (0, 1, 0, 0) e la retta polare normale nel punto (0, 0, 1, 0) al piano (0, 0, 0, 1).

Per l'una avremo

$$B = 1 \ , \ C = D = 0 \ , \ \beta = 1 \ , \ \gamma = \delta = 0 ;$$

per l'altra

$$B' = 1 \ , \ C' = D' = 0 \ , \ \beta = -1 \ , \ \gamma' = \delta' = 0 .$$

Quindi:

Cambiando i segni a una delle due terne dei parametri di scorrimento di una retta, si ottiene la retta polare.

Noi vedremo spesso che le rette polari hanno nello spazio ellittico l'uffizio che nello spazio piano hanno le direzioni opposte.

Il cangiare contemporaneamente i segni a tutti e 6 i parametri di scorrimento non muta la retta corrispondente, perchè ciò equivale a cambiare (x_i) in $(-x_i)$ oppure (ξ_i) in $(-\xi_i)$, oppure scambiando i punti (x_i), (ξ_i). (Cfr. le osservazioni finali).

§. 3. Ma i calcoli con le B, C, D, β, γ, δ riuscirebbero faticosissimi, se noi non introducessimo un algoritmo semplice, che ci permetterà di trattare poi con la massima sicurezza e facilità queste nuove coordinate di retta e di passare da queste alle usuali formole in coordinate di Weierstrass. Osserviamo perciò che si può scrivere:

$$(6) \qquad \begin{cases} B = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_4 & \xi_3 \\ x_4 & x_3 \end{vmatrix} \\[2ex] C = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_4 \\ x_2 & x_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix} \\[2ex] D = \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_2 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_4 & \xi_1 \\ x_4 & x_1 \end{vmatrix} \end{cases}$$

e analogamente

$$
(6')\qquad \begin{cases}
\beta = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_4 & \xi_3 \\ x_4 & x_3 \end{vmatrix} \\[2ex]
\gamma = \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_1 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_4 \\ x_2 & x_4 \end{vmatrix} \\[2ex]
\delta = \begin{vmatrix} \xi_4 & \xi_1 \\ x_4 & x_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_2 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix} .
\end{cases}
$$

Se ora (t_1, t_2, t_3, t_4) e (d_1, d_2, d_3, d_4) sono due quaderne di variabili, noi indicheremo con $[td]_2$, $[td]_3$, $[td]_4$ tre espressioni formate con le t, e con le d appunto come B, C, D sono formate con $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ e (x_1, x_2, x_3, x_4); e analogamente indicheremo con $[td]'_2$ $[td]'_3$ $[td]'_4$ espressioni formate con (t_i) e (d_i) come le β, γ, δ con (ξ_i) e (x_i).

Se noi ricordiamo lo sviluppo del prodotto di due matrici a due linee nella somma dei prodotti dei loro minori corrispondenti, e lo sviluppo di un determinante del quarto ordine nella somma dei prodotti dei minori del II ordine staccati dalla matrice formata dalle prime due linee per i minori complementari, otteniamo facilmente la seguente identità fondamentale:

$$
(7)\qquad \sum_i \left\{ [td]_i \, [ef]_i \right\} = \left\| \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ d_1 & d_2 & d_2 & d_4 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ f_1 & f_2 & f_2 & f_4 \end{matrix} \right\| +
$$

$$
+ \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix} .
$$

Indicando con $(t\,d\,e\,f)$ il determinante del 2.° membro, questa identità si può scrivere:

$$
(8)\qquad \sum \left\{ [td]_i \, [ef]_i \right\} = \sum te \sum df - \sum tf \sum de + (tdef) .
$$

Se noi vogliamo trovare il valore di $(t\,d\,e\,f)$ in funzione Σt^2, Σd^2,.... Σtd, Σte.... Σde.... basterà che noi lo innalziamo al quadrato; otterremo così un determinante i cui termini sono proprio della forma prescritta; estraendo poi la radice quadrata avremo, a meno del segno, il valore di $(t\,d\,e\,f)$. E se ne deduce:

I. Se $t_i = e_i$, $d_i = f_i$, $\Sigma t^2 = \Sigma d_2 = 1$, $\Sigma td = 0$ si ha

$$\sum \left\{ [td]_i \, [ef]_i \right\} = 1,$$

come si poteva prevedere ricordando le (5) e (5').

II. Se le t, le d, le e, le f formano quattro quaderne affatto distinte e $\Sigma t^2 = \Sigma d^2 = \Sigma e^2 = \Sigma f^2 = 1$, mentre

$$\sum td = \sum te = \sum tf = \sum de = \sum df = \sum ef = 0,$$

si ha

$$\sum \left\{ [td]_i \, [ef]_i \right\} = \pm 1;$$

e, senza preoccuparci per ora del segno, basti osservare che esso cambia, scambiando due delle quattro quaderne.

III. Se $e_i = t_i$, ma $d_i \mp f_i$ e $\Sigma ed = \Sigma ef = \Sigma df = 0$, mentre

$$\sum e^2 = \sum d^2 = \sum f^2 = 1,$$

si ha

$$\sum \left\{ [td]_i \, [ef]_i \right\} = 0.$$

L'ambiguità di segno che comparisce nel II di questi casi, e che deve sempre comparire per il modo in cui noi calcoliamo il determinante $(t\,d\,e\,f)$ appena $(t\,d\,e\,f)$ non sia nullo, non ci causa nessun imbarazzo; e ciò perchè scambiando i simboli $[td]_i$ coi simboli $[td]'_i$ si ha un'identità che differisce dalla (8), come un facile calcolo rivela, soltanto per il segno di $(t\,d\,e\,f)$. Ora, siccome noi consideriamo sempre contemporaneamente le due specie di parallelismo e di simboli, ci basterà fare il calcolo con una sola specie di simboli, p. es. coi simboli non accentati; otterremo così, è vero, dei termini a segno

indeterminato; ma sarà affatto inutile il conseguire la determinazione di questo segno, poichè se con parallelismo in un certo senso noi dobbiamo usare un segno, dobbiamo poi usare il segno opposto quando si consideri il parallelismo nell'altro verso.

Noi abbiamo già visto come per mezzo delle (6) e delle (6') si possano calcolare i parametri di scorrimento di una retta, definita al solito per mezzo di due suoi punti (x_i) e (ξ_i) distanti di $\frac{\pi}{2}$. Ora noi vogliamo mostrare come, dati i parametri di scorrimento di una retta, si possa tornare alla determinazione usuale della retta stessa. Cerchiamo, a tal fine, le coordinate del punto dove la retta, i cui parametri di scorrimento siano $B, C, D, \beta, \gamma, \delta$, incontra p. es. il piano $x_1 = 0$. Posto nelle (3) e (3') $x_1 = 0$ e confrontando i valori di $\xi_2\ \xi_3\ \xi_4$ che se ne ricavano, otteniamo

$$x_2 : x_3 : x_4 = B+\beta : C+\gamma : D+\delta.$$

Poichè, essendo $x_1 = 0$, deve essere $x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1$, si ha infine

$$(9) \qquad x_1 = 0\ ,\ x_2 = \frac{B+\beta}{\sqrt{2(1+B\beta+C\gamma+D\delta)}}\ ,\ x_3 = \frac{C+\gamma}{\sqrt{2(1+B\beta+C\gamma+D\delta)}}\ ,$$

$$x_4 = \frac{D+\delta}{\sqrt{2(1+B\beta+C\gamma+D\delta)}}\ .$$

È facile allora per mezzo delle (3) o delle (3)' calcolare le corrispondenti (ξ_i).

§. 4. Ci proponiamo ora di studiare i significati geometrici dei parametri di scorrimento di una retta. La loro proprietà fondamentale è di essere " invarianti per parallelismo ", come ci dice il seguente teorema:

" *Se due rette hanno uguali, oppure uguali e di senso opposto i tre parametri di una medesima terna esse sono parallele, in un senso o nell'altro, secondo che la terna in discorso è la prima o la seconda* ".

Infatti in tal caso esiste uno scorrimento che le fa scorrere tutte e due sopra sè stesse. Questo teorema, che scaturisce immediatamente dalle nostre considerazioni, è per noi fondamentale; e non sarà perciò male stabilirlo in modo diretto sia a riprova dei calcoli, sia perchè così otterremo alcune formule che ci saranno assai utili in seguito.

Sia una retta intersezione di due piani $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$ e $(b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$ che per semplicità supporremo ortogonali. L'assoluto essendo definito da

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

un sistema delle sue generatrici si può immaginare definito da

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} (x_1 + i\, x_2) + \lambda\, (x_3 + i\, x_4) = 0 \\ (x_3 - i\, x_4) - \lambda\, (x_1 - i\, x_2) = 0 \end{cases}$$

dove λ varia da generatrice a generatrice. Ogni punto che appartenga ai due piani (a_i), (b_i) soddisfa alle:

$$(\beta) \qquad \sum a_i\, x_i = 0 \ , \ \sum b_i\, x_i = 0$$

cosicchè per trovare a quali generatrici della serie (α) si appoggia la nostra retta basta eliminare le (x_i) fra le (α) e le (β); otteniamo così

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & i & \lambda & i\lambda \\ -\lambda & i\lambda & 1 & -i \end{vmatrix} = 0$$

ossia:

$$\lambda^2 \{[(a_1\, b_3 - b_1\, a_3) + (a_2\, b_4 - b_2\, a_4)] + i\,[(b_4\, a_1 - a_4\, b_1) + (b_2\, a_3 - a_2\, b_3)]\} +$$
$$+ 2\, i\lambda (a_4 b_3 - b_4 a_3 + b_2 a_1 - b_1 a_2) + \{(b_3 a_1 - a_3 b_1 + a_2 b_4 - b_2 a_4) - i\,(b_4 a_1 - a_4 b_1 + b_2 a_3 - a_2 b_3)\} = 0.$$

Affinchè la retta di intersezione dei piani (a'_i) e (b'_i) si appoggi alla medesima coppia di generatrici, sia cioè parallela (nel senso

determinato dalla serie rigata (α)) alla nostra retta, si deduce subito che deve essere:

$$(a_1 b_3 - b_1 a_3 + a_2 b_4 - b_2 a_4) : (a_1 b_4 - b_1 a_4 + b_2 a_3 - a_2 b_3) : (a_1 b_2 - b_1 a_2 + a_4 b_3 - a_3 b_4) =$$
$$= (a'_1 b'_3 - b'_1 a'_3 + a'_2 b'_4 - b'_2 a'_4) : (a'_1 b'_4 - b'_1 a'_4 + b'_2 a'_3 - a'_2 b'_3) : (a'_1 b'_2 - b'_1 a'_2 + a'_4 b'_3 - a'_3 b'_4).$$

Analogamente si procederebbe per l'altra serie di generatrici dell'assoluto; le formule precedenti non solo ridimostrano il nostro teorema, ma danno l'espressione dei parametri di scorrimento di una retta in funzione delle coordinate di due piani perpendicolari passanti per la retta.

Noi spesso dovremo trovare le traccie su un piano α delle parallele tirate per il suo polo A a una retta; e le chiameremo le " *immagini di Clifford* " della retta relative al piano stesso; dette S_i e Z_i le coordinate delle due traccie, avremo, dalle (3) e (3') quando si prenda per punto A il punto (1, 0, 0, 0)

$$(10)\quad \begin{cases} S_1 = 0\ ,\quad S_2 = B = [\xi\, x]_2\ ,\quad S_3 = C = [\xi\, x]_3\ ,\quad S_4 = D = [\xi\, x]_4 \\ Z_1 = 0\ ,\quad Z_2 = \beta = [\xi\, x]'_2\ ,\quad Z_3 = \gamma = [\xi\, x]'_3\ ,\quad Z_4 = \delta = [\xi\, x]'_4\,. \end{cases}$$

Per mezzo di queste uguaglianze e indicando con φ la distanza dei due punti S, Z definita da $\cos\varphi = \Sigma\, S_i Z_i$, le (9) diventano

$$(9')\qquad x_1 = 0 \qquad x_i = \frac{S_i + Z_i}{2\cos\frac{\varphi}{2}} \quad [i = 2, 3, 4]$$

che per mezzo delle (3) o delle (3') ci danno:

$$(11)\quad \xi_1 = -\cos\frac{\varphi}{2}\ ,\quad \xi_2 = \frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\begin{vmatrix} S_3 & S_4 \\ Z_3 & Z_4 \end{vmatrix},\quad \xi_3 = \frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\begin{vmatrix} S_4 & S_2 \\ Z_4 & Z_2 \end{vmatrix},$$

$$\xi_4 = \frac{1}{2\cos\frac{\varphi}{2}}\begin{vmatrix} S_2 & S_3 \\ Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

Si verifica subito che:

" Le due immagini di Clifford di due rette polari relative a un piano e le traccie su questo piano delle rette stesse si dividono armonicamente; una di queste traccie divide per metà un segmento terminato alle immagini ".

§ 5. Sarà per noi ancora opportuno di notare che i parametri di scorrimenti di una retta, anche moltiplicati per un qualunque fattore, soddisfanno alla:

$$B^2 + C^2 + D^2 - \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 = 0 .$$

Dunque noi potremo sempre immaginare 6 quantità legate da questa relazione come coordinate omogenee di retta, in quanto che si può fissare a meno del segno un fattore di proporzionalità (in un modo solo) in tal guisa che esse divengano i 6 parametri di scorrimento di una retta. La forma delle $B, C, D, \beta, \gamma, \delta$ ci dà il seguente teorema:

" I parametri di scorrimento (invarianti per parallelismo) di una retta non sono altro che le coordinate di Klein (somme e differenze opportune delle coordinate di Plücker) della retta stessa, quando si prenda per tetraedro fondamentale un tetraedro autopolare rispetto all' assoluto.

Questo teorema può venire utile per lo studio dei complessi algebrici di rette negli spazii ellittici; e noi ne daremo più tardi un esempio.

§. 6. Una prima notevolissima applicazione di queste coordinate è la definizione di angolo di due rette qualsiasi (ciò che finora non s'era fatto che per rette complanari). Noi chiameremo angolo φ di due rette tanto l'angolo φ definito da

$$\cos \varphi = BB' + CC' + DD' ,$$

quanto l'angolo φ generalmente distinto dal precedente, che riesce definito dalla

$$\cos \varphi = \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' ,$$

nelle quali formule intendiamo con $(B, C, D, \beta, \gamma, \delta)$ i parametri di una retta e con $(B', C', D', \beta', \gamma', \delta')$ i parametri omologhi dell'altra. Questa definizione scaturisce spontanea dal seguente teorema:

" *L'angolo di una coppia di rette complanari e quello delle parallele tirate ad esse da un punto* A *qualunque sono uguali, purchè le due parallele siano tirate in un medesimo verso* ".

Infatti, esiste allora uno scorrimento (destrorso o sinistrorso a secondo del senso del parallelismo) che porta il punto comune alla prima coppia di rette nel punto A, e la prima coppia di rette nella coppia di parallele per il punto A.

Il teorema si può dimostrare anche analiticamente: Se le rette date sono le rette (x, ξ), (x, η) il loro angolo φ è definito da $\cos\varphi = \Sigma\,\xi\eta$; l'angolo φ' delle parallele tirate dal punto $(1, 0, 0, 0)$ è dato da

$$\cos\varphi' = \sum\,[x\,\xi]_i\;]x\,\eta]_i$$

oppure da

$$\cos\varphi' = \sum\,[x\,\xi]'_i\;[x\,\eta]'_i$$

a seconda del verso del parallelismo; l'identità (8) ci dimostra che è in ambi i casi $\cos\varphi' = \cos\varphi$.

E allora si vede che gli angoli φ definiti dalle

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi = BB' + CC' + DD' \\ \cos\varphi = \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'\end{array}\right. \tag{12}$$

non sono altro per le (10) che gli *angoli formati dalle due coppie di parallele tirate dal punto* $(1, 0, 0, 0)$ *alle due rette date in un verso o nell'altro; e per teor. precedente si vede che invece di tirare queste parallele dal punto* $(1, 0, 0, 0)$ *si possono tirare queste parallele da un punto qualunque dello spazio, senza che per questo muti la determinazione dell'angolo.*

Se le due rette sono le rette (x, ξ) e (y, η) abbiamo per l'angolo delle due rette la seguente formula:

$$\cos\varphi = \sum\,[x\,\xi]_i\,[y\,\eta]_i \quad \text{oppure la} \quad \cos\varphi = \sum\,[x\,\xi]'_i\,[y\,\eta]'_i$$

a seconda che l'angolo si misura con parallele in un senso o nell'altro cioè per le identità (8) si ha

$$\cos \varphi = \cos \widehat{xy} \cos \widehat{\xi\eta} - \cos \widehat{\xi y} \cos \widehat{x\eta} \pm (x\,\xi\,y\,\eta)$$

dove con $\widehat{xy}$, $\widehat{\xi\eta}$, $\widehat{\xi y}$, $\widehat{x\eta}$ intendiamo la distanza del punto (x_i) al punto (y_i), dal punto (ξ_i) al punto (η_i) ecc. Senza soffermarci al significato geometrico di $(x\,\xi\,y\,\eta)$ si osservi che:

" *Il determinante* $(x\,\xi\,y\,\eta)$ *è nullo e l'angolo di due rette ammette una sola determinazione allora e allora soltanto che le due rette sono complanari* ". (Cfr. le osserv. finali).

Questo teorema ammette un notevole corollario, quando sia applicato a rette infinitamente vicine complanari:

" *Se noi delle generatrici di una rigata facciamo le immagini di Clifford relative a un piano qualunque, le due linee così ottenute si corrisponderanno in modo che archi corrispondenti siano uguali allora e allora soltanto che la rigata è sviluppabile* ".

E se ricordiamo (Bianchi A) che una rigata è a curvatura nulla solo se è una rigata di Clifford, vediamo che a questo teorema si contrappone l'altro:

" *Una rigata è a curvatura nulla soltanto se una delle sue immagini di Clifford si riduce a un punto* ".

E noi vediamo subito un nuovo significato delle coordinate di Klein; *esse misurano gli angoli, che in un verso e nell'altro una retta forma coi sei spigoli del tetraedro di riferimento o, come si può dire, con una terna di rette ortogonali.*

Così, essendo i parametri di scorrimento nient'altro che coordinate proiettive di una retta, e potendosi perciò definire un complesso lineare con un'equazione

$$l\mathrm{A} + m\mathrm{B} + n\mathrm{C} = p\alpha + q\beta + r\gamma$$

dove l, m, n, p, q, r sono costanti, noi vediamo per le (12) che un complesso lineare ammette in uno spazio ellittico la seguente definizione metrica:

" *Le rette di un complesso lineare sono quelle e tutte quelle, per cui è costante* $\frac{\cos \varphi}{\cos \psi}$ *dove* φ *e* ψ *sono gli angoli che una di esse forma con una retta fissa* ".

Questa retta colle notazioni precedenti sarebbe la retta i cui parametri sono $\left(\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \text{ecc.}\right)$.

Anche nello spazio curvo vale dunque il teorema:

" *Un complesso lineare ammette sempre una retta tale che i movimenti elicoidali attorno a essa riportano il complesso in sè stesso* ".

Si vedrebbe pure facilmente che il luogo dei punti tali che l'angolo delle parallele tirate per uno di essi a una retta fissa è costante, è una rigata di Clifford, e si avrebbe così una generazione delle rigate di Clifford, per mezzo dei movimenti elicoidali attorno a una retta; generazione identica in fondo a quella data dal prof. Bianchi nella memoria più volte citata; essa però, vista in questa forma differente, si può interpretare proiettivamente così:

" *Le proiettività che lasciano fissa una quadrica e due suoi punti* A, B *portano un punto qualunque dello spazio nei punti di una quadrica che ha comuni con la precedente le generatrici per* A, B ".

Oss. Non è possibile, a mio credere, definire il parallelismo di piani, che, per la legge di dualità, porterebbe a definire insieme il parallelismo di punti; si può però definire il parallelismo di elementi (insieme di punto e piano che si appartengono). *Diremo così che l'elemento* (A, α) *definito dal punto* A *e del piano* α *è parallelo all'elemento* (B, β,) *quando esiste uno scorrimento che porti in* A *in* B, α *in* β.

Il piano β è generato dalle parallele tirate per B alle rette di α passanti per A.

La distanza da A a B è uguale all'angolo di α con β.

Le normali in A ad α e in B a β sono parallele.

La cosa più interessante in tutto questo è *l'esistenza di figure duali che si corrispondono con parallelismo di elementi corrispondenti* e la conseguente dimostrazione del principio di dualità senza *considerazione dell'assoluto.*

Ma per brevità io ne dimostrerò l'esistenza, appunto partendo dall'assoluto; presa una figura S, consideriamone la figura polare S′, che uno scorrimento qualsiasi porti in Σ. Le figure S, Σ sono appunto due figure duali che si corrispondono nel modo anzidetto.

Il parallelismo di Clifford e la teoria delle curve.

§. 7. Il prof. Bianchi (loc. cit.) dimostrò le seguenti formule che sono la generalizzazione delle formule di Frenet per le curve di uno spazio piano:

$$\frac{dx_i}{d\sigma} = \xi_i\,, \quad \frac{d\xi_i}{d\sigma} = \frac{\eta_i}{\rho} - x_i\,, \quad \frac{d\eta_i}{d\sigma} = -\frac{\xi_i}{\rho} - \frac{\zeta_i}{\tau}\,, \quad \frac{d\zeta_i}{d\sigma} = \frac{\eta_i}{\tau}$$

dove σ, $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\tau}$ rappresentano rispettivamente l'arco, la prima e la seconda curvatura nel punto (x_i) generico di una curva, e dove con (ξ_i), (η_i), (ζ_i) si indicano rispettivamente i coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale alla curva nel punto (x_i).

Nei calcoli che seguono, come anche in tutto il resto del lavoro, noi, partendo da quanto s'è visto al §. 3, faremo i calcoli con una sola terna di parametri di scorrimento. Tiriamo dal punto (1, 0, 0, 0) le parallele alle tangenti fino a incontrare il piano polare; l'arco della così ottenuta indicatrice delle tangenti è dato da

$$ds^2 = \sum \{ d[x, \xi]_i \}^2 = \sum [dx, \xi]_i^2 + \sum [x, d\xi]_i^2 + 2 \sum [dx, \xi]_i [x, d\xi]_i .$$

Sostituiamo in queste formule ai differenziali dx, $d\xi$ i valori dati dalle succitate formule del prof. Bianchi; e sviluppiamo, ricordando le identità (8) del §. 3. Otterremo

$$ds^2 = \frac{d\sigma^2}{\rho^2}$$

che vale anche per le parallele nell'altro senso, perchè (§. 3) mancano termini col doppio segno; ciò che si spiega osservando che tangenti consecutive sono complanari e ricordando il teor. del §. 6. Dunque:

" *Il rapporto di uno* qualunque *degli angoli formati da due tangenti consecutive all'arco compreso tra i punti di contatto è uguale alla curvatura della curva nel punto corrispondente.*

Consideriamo ora invece una retta generica normale nel punto (x_i) alla curva e ne siano $(\eta_i \cos\varphi + \zeta_i \operatorname{sen}\varphi)$ i coseni di direzione, dove φ è costante; l'immagine di Clifford della rigata formata da esse, ha l'arco s definito dalla: $ds^2 = \Sigma \{ d\,[\eta \cos\varphi + \zeta \operatorname{sen}\varphi, x]_i^2 \}$, cioè, differenziando e ricordando le formule del prof. Bianchi dalla:

$$ds^2 = d\sigma^2 \sum \left[\operatorname{sen}\varphi \left\{ \left[\frac{\eta}{\tau}, x\right]_i + [\zeta\,\xi]_i \right\} + \cos\varphi \left\{ [\eta_i\,\xi]_i + \left[-\frac{\xi}{\rho} - \frac{\zeta}{\tau}, x\right]_i \right\} \right]^2$$

$$= \left\{ \frac{\cos^2\varphi}{\rho^2} + \left(\frac{1}{\tau} \pm 1\right)^2 \right\} d\sigma^2.$$

Dove, per le più volte citate identità e considerazioni del §. 3, il doppio segno si deve al doppio senso del parallelismo.

Per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si ha $ds^2 = \left(\frac{1}{\tau} \pm 1\right)^2 d\sigma^2$; noi porremo

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau} + 1 \;,\quad \frac{1}{T'} = \frac{1}{\tau} - 1$$

ritenendo però che spesso indicheremo con $\frac{1}{T}$ tutte e due queste espressioni, e chiameremo $\frac{1}{T}$ e $\frac{1}{T'}$ le due *torsioni di Clifford* di una curva in un punto. Abbiamo allora:

" *Il rapporto dell'angolo di due binormali consecutive misurato in un senso determinato all'arco compreso tra i loro piedi è uguale alla torsione di Clifford corrispondente* „. Donde si ha, sotto una forma lievemente differente, un teorema del prof. Bianchi (loc. cit.) che qui risulta dedotto in maniera diretta:

" *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le binormali a una curva siano parallele in un verso, è che la corrispondente torsione di Clifford sia nulla.*

Affinchè la retta uscente dal punto (x_i) d'una curva e con coseni di direzione $(a\xi_i + b\eta_i + c\zeta_i)$ con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (dove a, b, c sono costanti, generi al variare del punto x_i una rigata di Clifford, deve essere uguale a zero l'arco di una delle sue immagini di Clifford; cioè

$$\sum \left\{ a\,d\,[x,\xi] + b\,d\,[x,\eta] + c\,d\,[x,\zeta] \right\}^2 = 0$$

e coi soliti procedimenti

$$(\alpha) \ldots\ldots \left(\frac{a}{\rho} + \frac{c}{\mathrm{T}}\right)^2 + b^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\mathrm{T}^2}\right) = 0 \quad \text{cioè } \frac{\rho}{\mathrm{T}} = \text{cost.};\ b = 0$$

dove $\frac{1}{\mathrm{T}}$ indica la corrispondente torsione di Clifford. La curva è quindi un'elica; ma qui si aggiunge un'interpretazione nuova della condizione $\frac{\rho}{\mathrm{T}} = \text{cost.}$, dicendo che deve essere *costante il rapporto della prima curvatura a una torsione di Clifford.*

Se noi esprimessimo invece che la nostra rigata è a curvatura nulla si troverebbero le

$$b = 0\ ;\ \left(\frac{a}{\rho} + \frac{c}{\tau} - c\right)\left(\frac{a}{\rho} + \frac{c}{\tau} + c\right) = 0$$

che non coincidono con la (α) che per elementi reali. Se ne deduce l'esistenza di " *rigate singolari immaginarie generabili come le rigate di Clifford da rette invariabilmente unite al triedro principale di una curva, che non sono a curvatura nulla sebbene abbiano nulla una delle indicatrici di Clifford; le loro generatrici sono perciò tangenti all'assoluto* ".

Aggiungerò di volo che invece *tutte e sole le curve per cui* $\frac{\rho}{\tau} = \text{cost.}$ *sono tali che esiste una retta invariabilmente unita al triedro principale generante una sviluppabile.*

Basta infatti esprimere (§. 6) che le immagini di Clifford della rigata generata da questa retta si corrispondono con uguaglianza di lunghezza d'arco per trovare, con le notazioni precedenti

$$\frac{b^2+c^2}{\tau}+\frac{ac}{\rho}=0.$$

§. 8. Queste considerazioni preliminari ci suggeriscono immediatamente un'idea, che ci servirà a stabilire una nuova forma assai notevole, a mio parere, delle formule del prof. Bianchi già citate. A queste formule il prof. Bianchi giunse esaminando i *coseni di direzione* della tangente, della normale principale, della binormale. Noi esamineremo invece i *parametri di scorrimento* delle stesse, che indicheremo rispettivamente con

$$(\alpha,\beta,\gamma\,;\,\alpha',\beta',\gamma')\;;\;(\xi,\eta,\zeta\,;\,\xi',\eta',\zeta')\;;\;(\lambda,\mu,\nu\,;\,\lambda',\mu',\nu').$$

Per quanto s'è visto è

$$(13)\left\{\begin{array}{l}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\ldots\ldots=1\\ \alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=\alpha'\xi'+\beta'\eta'+\gamma'\zeta'=\xi\lambda+\eta\mu+\zeta\nu=\ldots\ldots=0\\ d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2=\dfrac{d\sigma^2}{\rho^2}=d\alpha'^2+d\beta'^2+d\gamma'^2\\ d\lambda^2+d\mu^2+d\nu^2=d\sigma^2\,\dfrac{1}{T^2}\\ d\lambda'^2+d\mu'^2+d\nu'^2=\dfrac{1}{T'^2}\,d\sigma^2;\;\lambda\,d\alpha+\mu\,d\beta+\nu\,d\gamma=\lambda'\,d\alpha'+\ldots.=0.\end{array}\right.$$

Queste formule basterebbero col procedimento identico a quello che si segue per le formule di Frenet nello spazio piano a dare le seguenti formule:

$$(14)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d\alpha}{d\sigma}=\dfrac{\xi}{\rho}\;;\;\dfrac{d\xi}{d\sigma}=-\dfrac{\alpha}{\rho}-\dfrac{\lambda}{T}\;;\;\dfrac{d\lambda}{d\sigma}=\dfrac{\xi}{T}\\ \dfrac{d\alpha'}{d\sigma}=\dfrac{\xi'}{\rho}\;;\;\dfrac{d\xi'}{d\sigma}=-\dfrac{\alpha'}{\rho}-\dfrac{\lambda'}{T'}\;;\;\dfrac{d\lambda'}{d\sigma}=\dfrac{\xi'}{T'}\end{array}\right.$$

e le analoghe per $\beta, \gamma, \beta' \gamma', \eta, \zeta$ ecc. Però vi sarebbe l'ambiguità di segno nei secondi membri delle (14) proveniente dal fatto che nelle (13) comparisce solo $\frac{1}{\rho^2}, \frac{1}{T^2}$ e noi estraendo le radici quadrate saremmo incerti se dovessimo tenere $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{T}$ oppure $-\frac{1}{\rho}, -\frac{1}{T}$. Ma le formule (14) si verificano facilmente partendo dalle formule del prof. Bianchi. Quanto alle

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} = \frac{\xi}{\rho}\,;\ \frac{d\alpha'}{d\sigma} = \frac{\xi'}{\rho}\,,$$

basta ricordare i valori effettivi dei nostri parametri e la loro dimostrazione riesce immediata; osserviamo ora p. es. la

$$(\gamma) \qquad \frac{d\xi}{d\sigma} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{T}\,.$$

Ricordiamo che

$$\xi = \eta_1 x_2 - \eta_2 x_1 + \eta_3 x_4 - \eta_4 x_3\,.$$

Per le formule del prof. Bianchi si deduce, ricordando che $\alpha = [x\xi]_1$ e che $\lambda = [x\zeta]_1$,

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{\tau} + (\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1 + \eta_3 \xi_4 - \eta_4 \xi_3)\,.$$

Ora $\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1 + \eta_3 \xi_4 - \eta_4 \xi_3$ non è altro che un parametro di scorrimento della retta polare della binormale; e quindi per un teorema già dimostrato (§. 2) è uguale a $\pm \lambda$ a seconda del senso del parallelismo; e la (γ) è dimostrata [1]). In modo analogo si dimostrerebbero le altre formule (14).

Dalle (14), che così singolarmente si avvicinano alle formule di Frenet per lo spazio piano, deduciamo alcuni risultati, a mio credere, degni di nota.

---

[1]) Qui si sono usate le (λ, μ, ν) per indicare ambedue le terne (λ, μ, ν), (λ', μ', ν'), ciò che certo non genera confusione; si ricordi pure di non confondere la ξ con le ξ_i.

Poichè l'integrazione di ciascuno dei due gruppi (14) di formule, si riduce a un'equazione di Riccati, otteniamo:

" *La effettiva costruzione di una curva di cui siano note la curvatura e la torsione in funzione dell'arco si riduce all'integrazione di due equazioni di Riccati* ".

Così se due curve si corrispondono punto a punto con parallelismo in un verso del triedro principale e per cui siano (ρ, T, σ) e (ρ_1, T_1, σ_1) la prima curvatura, la torsione di Clifford corrispondente e l'arco in punti corrispondenti, si ha

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{T}{T_1} = \frac{d\sigma}{d\sigma_1};$$

ciò che permette (come già osservò il prof. Bianchi per lo spazio piano) di *ridurre la costruzione di una curva di cui siano date le equazioni intrinseche a quella di una curva per cui sia* $\rho =$ cost. *oppure* $T =$ cost.

L'analogia delle (14) con le formule di Frenet dà immediatamente alcuni teoremi, per la cui dimostrazione basta ripetere parola per parola quanto si fa per dimostrare gli analoghi nello spazio piano. Così p. es.

Se due curve hanno parallele le normali principali in punti corrispondenti, è costante l'angolo di tangenti corrispondenti e le curvature dell'una sono funzioni lineari di quelle dell'altra (ciò che può servire per lo studio delle curve di Bertrand nello spazio curvo).

Così si può dedurre in altro modo da quanto si è fatto sopra tutta la teoria delle eliche, ecc. ecc. Quanto m'importa d'osservare, è che spesso i calcoli riescono più semplici nello spazio curvo, che nello spazio piano. Se noi p. es. volessimo trovare le evolute di una curva, basterebbe che noi cercassimo quando la rigata generata da una normale alla curva con coseni di direzione $(\xi_i \cos\varphi + \lambda_i \operatorname{sen}\varphi)$ dove φ è funzione di σ) genera una sviluppabile, cioè quando le due immagini di Clifford della rigata si corrispondono con uguaglianza d'arco " s ". Ora è

$$ds^2 = \sum [d\xi \cos\varphi + d\lambda \operatorname{sen}\varphi - \xi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi + \lambda \cos\varphi\, d\varphi, x]_i^2 .$$

Partendo dalle solite osservazioni del §. 3, usando delle (14) e ricordando che $\frac{1}{T}$ ammette due determinazioni, si vede che basta annullare i termini con doppio segno della precedente espressione per trovare la condizione voluta; e calcolando si ottiene così: $\varphi = \int \frac{d\sigma}{\tau}$.

Il risultato più notevole e di cui vedremo in seguito alcune applicazioni è dato dalla seguente proposizione:

A ogni curva C dello spazio ellittico corrispondono due curve C′, C″ *dello spazio piano che corrispondono alla* C (e quindi anche tra di loro) *punto per punto con uguaglianza d'arco e di prima curvatura, e le cui torsioni in punti corrispondenti differiscono di una costante. Viceversa, due curve* C′, C″ *dello spazio piano che si corrispondono punto a punto con uguaglianza d'arco e di prima curvatura, mentre le loro torsioni in punti corrispondenti differiscono di una costante* ± 2, *danno senza quadrature una curva* C *di uno spazio ellittico a curvatura* $+1$ *che loro corrisponde punto a punto con uguaglianza di arco e di prima curvatura e che ha per torsioni di Clifford in un punto le torsioni di* C′ *e di* C″ *nei punti corrispondenti.*

La prima parte di questo teorema è evidente per le (14); dimostriamo la seconda parte. Se noi chiamiamo (α, β, γ), (ξ, η, ζ), (λ, μ, ν) i coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale in un punto di C′ e con $(\alpha', \beta', \gamma')$, (ξ', η', ζ'), (λ', μ', ν') i coseni delle rette corrispondenti di C″, se noi indichiamo con s, $\frac{1}{\rho}$ l'arco e la curvatura di C′ e C″ (in punti corrispondenti) e con $\frac{1}{T}$ e $\frac{1}{T'}$ le corrispondenti torsioni, avremo per le formule di Frenet nello spazio piano

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\xi}{\rho}\,; \quad \dfrac{d\xi}{ds} = -\dfrac{\alpha}{\rho} - \dfrac{\lambda}{T}\,; \quad \dfrac{d\lambda}{ds} = \dfrac{\xi}{T} \text{ ecc.} \\[2ex] \dfrac{d\alpha'}{ds} = \dfrac{\xi'}{\rho}\,; \quad \dfrac{d\xi'}{ds} = -\dfrac{\alpha'}{\rho} - \dfrac{\lambda'}{T'}\,; \quad \dfrac{d\lambda'}{ds} = \dfrac{\xi'}{T'} \text{ ecc.} \end{cases}$$

Poichè $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \ldots\ldots = 1$ noi potremo immaginare le $(\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha', \beta', \gamma')$, le $(\xi, \eta, \zeta;\ \xi', \eta', \zeta')$ e e le $(\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu')$ come parametri di scorrimento di tre rette dello spazio curvo. Poiche per le (α) si ha $d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = d\alpha'^2 + d\beta'^2 + d\gamma'^2$ la retta $(\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha', \beta', \gamma')$ descrive (§. 6) una sviluppabile, cioè inviluppa una curva C; e, poichè per le (α)

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = \lambda'\alpha' + \mu'\beta' + \nu'\gamma' = \lambda\, d\alpha + \mu\, d\beta + \nu\, d\gamma = \lambda' d\alpha' + \mu' d\beta' + \nu' d\gamma' = 0$$

la retta $(\lambda, \mu, \nu;\ \lambda', \mu', \nu')$ è precisamente la binormale a questa curva nel suo punto generico; e poichè

$$\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma = \xi'\alpha' + \eta'\beta' + \zeta'\gamma' = \xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu = \xi'\lambda + \eta'\beta' + \zeta'\gamma' = 0$$

la retta $(\xi, \eta, \zeta;\ \xi', \eta', \zeta')$ è precisamente la normale principale alla curva C nel suo punto generico.

Questi ultimi ragionamenti si potrebbero fare anche se nulla si sapesse circa alle torsioni di C′ e di C″; ma in tal caso non si potrebbe più dire che, se σ è l'arco della C, si ha $d\sigma = ds$. Se noi supponiamo invece che $\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} = \text{cost.}$ e per maggior semplicità supponiamo che $\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} = \pm 2$, allora si vede subito che $d\sigma = ds$; infatti si è visto che in uno spazio a curvatura $+1$, l'arco σ è definito da

$$d\sigma = \frac{\pm 1}{2} \left\{ \lambda\, d\xi + \mu\, d\eta + \nu\, d\zeta) - (\lambda' d\xi' + \mu' d\eta' + \nu' d\zeta') \right\}.$$

Che la differenza costante $\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}$ sia ± 2 non toglie la generalità; che se $\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}$ fosse una costante distinta da ± 2 si avrebbe, come si intende facilmente, una curva C di uno spazio ellittico a curvatura differente da $+1$. (Del resto con una similitudine si può sempre passare da una tal coppia di curve a una coppia di curve, per cui sia $\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} = \pm 2$).

Dimostrato che la C corrisponde alle C′, C″ con uguaglianza di arco, le (α) confrontate con le (14) dimostrano il nostro teorema completamente.

Un corollario che ci sarà di grande utilità è il seguente:

" *A una coppia di curve dello spazio piano a torsione costante, ma distinta, che si corrispondano con uguaglianza di arco e di prima curvatura corrisponde una curva a torsione costante dello spazio curvo e viceversa* ".

E qui appare sotto nuova luce il teorema che con quadrature si possono trovare tutte le curve a torsione costante dello spazio piano; perchè dal teorema poco fa dimostrato si deduce:

" *Il problema di trovare le curve a torsione costante dello spazio piano e quello di trovare tutte le curve piane degli spazii ellittici sono equivalenti. Quindi poichè la risoluzione dell'uno è immediata, l'altro è completamente risoluto* ".

Infine osserviamo che la generalizzazione agli spazii curvi, ottenuta recentemente dal prof. Razzaboni, della trasformazione [1]) delle curve a torsione costante si può per questi teoremi interpretare nella metrica euclidea come una trasformazione di quelle coppie di curve a torsione costante, ma distinta, che si corrispondono con uguaglianza d'arco e di prima curvatura.

Delle superficie di scorrimento.

§. 9. A titolo di esempio, voglio enunciare qui un teorema semplicissimo circa alle superficie di scorrimento, a quelle superficie cioè che possono esser generate da uno scorrimento continuo d'una curva e che (Bianchi A) ammettono perciò una seconda consimile generazione:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie sia di scorrimento lungo le $u =$ cost. e le $v =$ cost. *è che le tangenti alle* $u =$ cost. *lungo una* $v =$ cost. *siano parallele e così pure le tangenti alle* $v =$ cost. *lungo una* $u =$ cost. *Allora si potrà nelle forme quadratiche definenti la superficie porre* $E = G = 1$, *e fatto* $F = \cos\sigma$, *si*

[1]) Bianchi. *Giornale di Battaglini,* 1884.

dovrà avere $D' = \operatorname{sen} \sigma$; *viceversa se* $E = G = 1$, $F^2 + D'^2 = 1$ *la superficie è di scorrimento lungo* le u, le v.

L'elemento lineare della immagine di Clifford della rigata formata dalle tangenti a una $v =$ cost. lungo una $u =$ cost. è dato (indicando con d differenziali parziali rispetto a v) dalla:

$$ds^2 = \sum \left[d \left[x \, , \, \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \right]_i \right]^2 =$$

$$= dv^2 \sum \left\{ \left[\frac{\partial x}{\partial v} \, , \, \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} \right]_i + \left[x \, , \, \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} \right]_i + \left[x \, , \, -\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial E}{\partial v}}{\sqrt{E^3}} \frac{\partial x}{\partial u} \right]_i \right\}^2 .$$

L'espressione del secondo membro deve essere nulla.

Sviluppando con le note identità, ricordando le formule che danno le derivate seconde delle (x_i) in funzione delle derivate prime e dei coseni di direzione della normale, e notando che

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \cdots & \cdots & \frac{\partial x_4}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \cdots & \cdots & \frac{\partial x_4}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \, \partial v} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 x_4}{\partial u \, \partial v} \end{vmatrix} = D' \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_4 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \cdots & \frac{\partial x_4}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial x_4}{\partial v} \\ \xi_1 & \cdots & \xi_4 \end{vmatrix} = \pm D' \sqrt{EG - F^2}$$

otteniamo in fine col solito significato del doppio segno

$$(D' \pm \sqrt{EG - F^2})^2 + \frac{\left(F \frac{\partial E}{\partial v} - E \frac{\partial G}{\partial u} \right)^2}{4 E (EG - F^2)} = 0 ,$$

cioè

$$D'^2 \pm \sqrt{EG - F^2} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0 .$$

Analogamente si troverebbe $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$. Si può dunque fare $E = G = 1$ e quindi poi $D''^2 = 1 - F^2$; le prime di queste tre formule dimostrano che la superficie riesce di scorrimento; l'ultima dimostra la seconda parte del nostro teorema.

Delle congruenze di raggi.

§. 10. Le congruenze di rette nello spazio curvo furono studiate dal Fibbi in una sua memoria pubblicata negli " *Annali della Scuola Normale Superiore* Tomo VII, 1895 "; noi senza entrare in casi particolari, studieremo quali conseguenze si possano ottenere dalla considerazione della figura piana, generata tirando per il punto $(1, 0, 0, 0)$ le parallele ai raggi di una congruenza fino ad incontrare il piano polare. Detto (x_i) il punto generico della superficie scelta come iniziale della congruenza, e (ξ_i) il piano in esso normale al raggio corrispondente, il Fibbi pose:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \end{matrix} \right\|^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2$$

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 & d\xi_4 \end{matrix} \right\|^2 = E'\, du^2 + 2\, F'\, du\, dv + G'\, dv^2$$

$$\sum dx_i\, d\xi_i = e\, du^2 + (f + f')\, du\, dv + g\, dv^2.$$

Noi avremo come elemento lineare dell'imagine piana suddetta:

$$ds^2 = \sum [d\,(x, \xi)_i]^2 = \sum [dx, \xi]_i^2 + \sum [x, d\xi]_i^2 + 2 \sum [dx, \xi]_i\, [x, d\xi]_i =$$

$$= \sum dx^2 - (\sum \xi\, dx)^2 + \sum d\xi^2 - (\sum x\, d\xi)^2 \pm 2\,(x, dx, \xi, d\xi).$$

Con $(x, dx, \xi, d\xi)$ indichiamo al solito il determinante le cui linee sono $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ $(dx_1, \ldots)$ $(\xi_1, \ldots)$ $(d\xi_1, \ldots)$; il doppio segno è dovuto alla solita causa. Quando $(x, dx, \xi, d\xi) = 0$ l'angolo di due generatrici consecutive ha una sola determinazione; *quindi* (§. 6)

$(x, dx, \xi, d\xi) = 0$ *è, come già riconobbe direttamente il Fibbi, l'equazione delle sviluppabili della congruenza.* La parte di segno costante nella formula precedente è, con le notazioni del Fibbi,

$$(\alpha) \qquad (E+E')\, du^2 + 2\,(F+F')\, du\, dv + (G+G')\, dv^2 .$$

La parte di segno variabile è, a meno del fattore ± 2 uguale a

$$(\beta) \begin{cases} \sqrt{\begin{vmatrix} E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2 & e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2 \\ e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2 & E'du^2 + 2\,F'du\,dv + G'dv^2 \end{vmatrix}} = \\ = \dfrac{(E\,f - F\,e)\,du^2 + (E\,g - F\,(f'-f) - G\,e)\,du\,dv + (F\,g - G\,f')\,dv^2}{\sqrt{E\,G - F^2}} = \\ = \dfrac{(E'f' - F'e)\,du^2 + (E'g + F'(f'-f) - G'e)\,du\,dv + (F'g - G'f)\,dv^2}{\sqrt{E'G' - F'^2}} . \end{cases}$$

La (α) *e la* (β) *sono due forme quadratiche affatto indipendenti dalla superficie scelta come iniziale.*

§§. 11. *Teor. Le uniche equazioni cui debbono soddisfare le forme* (α) *e* (β) *affinchè le forme del Fibbi (già legate da facili equazioni algebriche* notate dal Fibbi stesso) *corrispondano realmente a una congruenza sono che la loro somma e la loro differenza siano forme a curvatura* $+1$. (Si ricordi il fattore numerico che moltiplica le β).

Questo teorema, che permette di *generalizzare alle congruenze le equazioni di Gauss e di Codazzi,* si deduce ricordando che di una retta e quindi anche di ∞^2 rette ossia di una congruenza si possono dare ad arbitrio le immagini piane; ciò che definisce poi la congruenza.

Il determinare i punti di un piano dello spazio curvo (o della sfera euclidea) di cui sia dato l'elemento lineare si riduce all'integrazione di un'equazione di Riccati. Dunque:

Date le forme (α), (β) *di una congruenza oppure le forme del Fibbi che soddisfacciano alle predette condizioni, l'integrazione di due equazioni di Riccati basta alla determinazione effettiva della congruenza.*

Le traccie sul piano rappresentativo delle rette della congruenza si ottengono (§. 4) dimezzando i segmenti unenti punti corrispondenti delle due immagini piane; che, se indichiamo al solito con $(Y_1 Y_2 Y_3 O)$ e $(Z_1 Z_2 Z_3 O)$ punti corrispondenti di tali immagini e con φ la loro distanza, l'elemento lineare del piano riferito a tali traccie sarà

$$\sum\left[d\left(\frac{Y_i+Z_i}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}\right)\right]^2=\sum\left(\frac{dY_i+dZ_i}{2\cos\frac{\varphi}{2}}+\frac{Y_i+Z_i}{4}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi\right)^2.$$

Esso sarà subito noto quando oltre gli elementi lineari delle immagini piane si conoscano φ e le derivate di φ rispetto u, v, u', v' dove si immaginino le (u, v) le coordinate definenti (Y_i), le (u', v') quelle definenti (Z_i) e tutte e quattro si immaginino in questa derivazione distinte. Infatti

$$\frac{\partial\cos\varphi}{\partial u}=\sum Z\frac{\partial Y}{\partial u}\ ;\ \frac{\partial\cos\varphi}{\partial u'}=\sum Y\frac{\partial Z}{\partial u'}\ \text{ecc.}$$

$$2\sum dY\,dZ=d^2\sum YZ-\sum(Y\,d^2Z+Z\,d^2Y).$$

Questa ultima equazione si riduce subito appena si ricordino le formule che danno d^2Z, d^2Y per Y, Z e per i loro differenziali primi.

Può forse interessare l'osservazione che basta conoscere l'elemento lineare del piano riferito a tali traccie (quando le $u=\text{cost.}$ $v=\text{cost.}$ siano le sviluppabili) se la congruenza è W. Infatti con una rappresentazione geodetica sullo spazio euclideo si faccia corrispondere il piano rappresentativo al piano all'infinito. Tale elemento lineare diverrà l'elemento lineare della sfera euclidea riferito alle immagini sferiche delle sviluppabili. Usando delle notazioni del prof. Bianchi (Lezioni, ecc. Cap. 10, §§. 149, 150) dovrà essere

$$D_1 : D''_1 = D_2 : D''_2 \quad \text{cioè posto } \rho=e^{\tau}$$

$$(\gamma)\qquad \frac{\partial\tau}{\partial u}\frac{\partial\tau}{\partial v}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\tau}{\partial u}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\tau}{\partial v}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=0.$$

mentre l'equazione di Guichard sottratta dalla precedente diventa

$$(\delta) \qquad \frac{\partial^2 \tau}{\partial u\, \partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}}{\partial u} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}}{\partial v} - \mathrm{F}.$$

Quest'ultima dà un risultato della forma $\tau = \mathrm{M}(u, v) + \int \varphi(u)\, du + \int \psi(v)\, dv$ dove M è noto, φ e ψ sono da determinarsi. Sostituendo nella precedente equazione si ha $\psi(v)$ in funzione di $\varphi(u)$; derivando rispetto (u) si ottiene per $\varphi(u)$ un'equazione della forma

$$\mathrm{A}\varphi^2 + \mathrm{B}\varphi + \mathrm{C} + \mathrm{D}\varphi' = 0 \quad \text{con A, B, C note.}$$

Quest'equazione ripetutamente derivata rispetto v, dà il mezzo di determinare φ, e quindi τ e la congruenza. Senza entrare in facili discussioni minute si osservi ancora che supposto $\mathrm{F} = 0$ le equazioni precedenti divengono

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial u\, \partial v} = -\frac{\partial^2 \log \sqrt{\mathrm{EG}}}{\partial u\, \partial v}\,; \quad \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} + \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} \frac{\partial \tau}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} = 0.$$

Mutando i parametri delle $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ si può fare che $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}$ soddisfi ad ambedue; posto così

$$\tau = -\log \sqrt{\mathrm{EG}} + \int \varphi(u)\, du + \int \psi(v)\, dv$$

si ha

$$\varphi\, \psi = \varphi \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial v} + \psi \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial u} + \frac{\partial \left(\log \sqrt{\mathrm{E}}, \log \sqrt{\mathrm{G}}\right)}{\partial (u, v)} = 0$$

e poichè $\varphi = \psi = 0$ è una soluzione, E è funzione di G. *Ecco qui il teorema di Weingarten per le superficie* W. Ma qui osserviamo che se è risolubile l'equazione

$$1 = \frac{1}{\varphi(u)} \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} + \frac{1}{\psi(v)} \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}$$

ciò che avviene p. es. per $\mathrm{E} = 1$, $\mathrm{G} = \operatorname{sen}^2 u$ si ottengono dall'elemento lineare stesso altre congruenze W.

§. 12. Ritorniamo allo spazio curvo e risolviamo la questione di riconoscere se una congruenza è W, appena ne siano date le forme fondamentali, o ciò che è lo stesso, gli elementi lineari delle sue immagini piane di Clifford. Perciò basta che noi ricordiamo che una retta è definita dai suoi parametri di scorrimento, che, come sappiamo non sono altro che coordinate proiettive di retta; ora (Darboux Leçons, T. 3.° pag. 345) le coordinate di una retta che descriva una congruenza W sono soluzioni di una medesima equazione a derivate parziali del secondo ordine; cosicchè, se $(\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta, \gamma)$, sono i parametri di scorrimento di una retta generica della congruenza, dovrà essere

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial u} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \gamma_1}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial v^2} \end{vmatrix}.$$

Osserviamo ora che $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ e che $d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2$ è noto, perchè è l'elemento lineare di una delle immagini piane di una congruenza.

Possiamo dunque concepire α, β, γ come coordinate di un punto variabile su di una sfera euclidea, per cui sia noto l'elemento lineare in funzione di u, v; si potranno quindi esprimere le derivate seconde delle α, β, γ in funzione delle loro derivate prime, delle α, β, γ stesse e dei coefficienti di questo elemento lineare; e analogamente per α', β', γ'. Sostituiti nel determinante precedente questi valori per le derivate seconde di $(\alpha, \beta. \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ si sviluppi il determinante stesso, facendo la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando i

minori di terz'ordine appartenenti alla matrice formata dalle tre prime colonne per i minori complementari. Se noi indichiamo con $e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ e con $e'du^2 + 2f'du\,dv + g'dv^2$ gli elementi lineari delle due immagini piane, e poniamo $\Delta = \sqrt{eg - f^2}$, $\Delta' = \sqrt{e'g' - f'^2}$ (supposti non nulli) facilmente troviamo i valori dei suddetti determinanti del terz'ordine.

Si avrà p. es.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \cdots & \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \cdots & \end{vmatrix} = \Delta \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \cdots & \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} & \cdots & \end{vmatrix} = -\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \Delta \quad \text{ecc. ecc.}$$

Indichiamo con A il determinante

$$\begin{vmatrix} \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} & e \\ \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} & f \\ \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} & g \end{vmatrix}$$

e con (− A) quello che se ne ottiene mutando i segni dell'ultima colonna; e analogamente poniamo A′ e (− A′) uguali ai corrispondenti determinanti per il secondo elemento lineare. Si vede allora subito che la condizione affinchè la nostra congruenza sia W si ottiene ponendo uguali *la espressione ottenuta aggiungendo ad* A *la somma dei termini di* (− A) *moltiplicati rispettivamente per i minori complementari dei termini corrispondenti di* A′ *e l'espressione che si deduce da questa scambiando* e *ed* e', f *ed* f', g *e* g'.

Vogliamo ora esporre un'altra applicazione dei nostri principii alla teoria delle congruenze, e precisamente al concetto della " densità " di una congruenza in un punto. Per definire questa densità in un punto P il Fibbi procedeva nel modo seguente.

Si segni sul piano π normale in P al raggio corrispondente della nostra congruenza un intorno $d\omega$ infinitesimo di P, e sulle rette della

congruenza che escono dai punti C di $d\omega$ si segni il punto D coniugato rispetto all'assoluto del punto C; le rette che uniscono il punto P a questi punti D determinano su una sfera di raggio infinitesimo r e di centro P un'area infinitesima $r^2 d\omega'$; il rapporto $\frac{d\omega'}{d\omega}$ è ciò che il Fibbi chiamava " densità „ della congruenza nel punto P. Noi introdurremo qui a lato della " densità „ definita a modo del Fibbi un nuovo elemento, che chiameremo " densità di Clifford „ di una congruenza, che forse è più adatto all'intima natura dello spazio ellittico, e che in ogni modo ci porterà a uno dei teoremi più importanti del presente lavoro. Tiriamo per un punto A dallo spazio ellittico le parallele, al modo di Clifford, alle rette della congruenza uscenti dai punti di $d\omega$; esse determineranno sul piano polare A un elemento infinitesimo $d\omega''$; il rapporto $\frac{d\omega''}{d\omega}$ (che avrà naturalmente due determinazioni) misurerà per noi la " densità di Clifford „ (destrorsa o sinistrorsa) della congruenza nel punto P; la media aritmetica di queste due densità misurerà ciò che noi chiameremo la *densità assoluta di Clifford* della congruenza nel punto P. Procediamo al calcolo effettivo, osservando che senza scemare la generalità potremo supporre che il punto P sia il punto (1,0,0,0) e il piano π normale in P al raggio della congruenza passante per P siano il piano (0,0,0,1). Prendiamo su $d\omega$ due punti P', P'' infinitamente vicini a P e consideriamo i piani π', π'' normali in P', P'' ai raggi corrispondenti della congruenza. Ricordando le relazioni che legano le coordinate di un punto, di un piano, e la condizione affinchè un punto e un piano si appartengano, si vedrà che a meno d'infinitesimi d'ordine superiore si potrà porre:

$$\begin{aligned} P' &= (1, dx_2, dx_3, 0) \\ P'' &= (1, \delta x_2, \delta x_3, 0) \\ \pi' &= (0, d\xi_2, d\xi_3, 1) \\ \pi'' &= (0, \delta\xi_2, \delta\xi_2, 1) \end{aligned}$$

dove d, δ siano simboli di differenziali.

Conducendo le parallele nel primo verso, otterremo con le formule usuali, che le immagini di Clifford dei raggi per P, P', P'' avranno per coordinate rispettivamente:

$$(-1, 0, 0, 0) \quad (-1 - dx_2\, d\xi_3 + dx_3\, d\xi_2\,,\ -dx_2 + d\xi_3\,,\ -dx_3 - d\xi_2\,, 0)$$
$$-1 - \delta x_2\, \delta\xi_3 + \delta x_3\, \delta\xi_2\,,\ -\delta x_2 + \delta\xi_3\,,\ -\delta x_3 - \delta\xi_2\,, 0)$$

quando si prende il punto (0, 0, 0, 1) come punto da cui si tirano le parallele. A meno d'infinitesimi trascurabili queste tre immagini hanno dunque per coordinate

$$(-1\,, 0\,, 0\,, 0)$$
$$(-1\,,\ -dx_2 + d\xi_3\,,\ -dx_3 - d\xi_2\,, 0)$$
$$(-1\,,\ -\delta x_2 + \delta\xi_3\,,\ -\delta x_3 - \delta\xi_2\,, 0)$$

e l'area $d\omega''$ del triangolo da essi racchiuso è data da

$$36\, d\omega''^2 = \left\|\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -dx_2 + d\xi_3 & -dx_3 - d\xi_2 & 0 \\ -1 & -\delta x_2 + \delta\xi_3 & -\delta x_3 - \delta\xi_2 & 0 \end{matrix}\right\|^2$$

cioè da

$$6\, d\omega'' = \pm \left\{ \begin{vmatrix} d\xi_3 & dx_3 \\ \delta\xi_3 & \delta x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d\xi_2 & dx_2 \\ \delta\xi_2 & \delta x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d\xi_3 & d\xi_3 \\ \delta\xi_3 & \delta\xi_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_3 & dx_3 \\ \delta x_3 & \delta x_2 \end{vmatrix} \right\}$$

È facile verificare che, con *(opportuna scelta dei segni)*

$$6\, d\omega = \begin{vmatrix} dx_3 & dx_2 \\ \delta x_3 & \delta x_2 \end{vmatrix}$$

e che

$$6\, d\omega' = \begin{vmatrix} d\xi_3 & d\xi_2 \\ \delta\xi_3 & \delta\xi_2 \end{vmatrix}.$$

Calcoliamo dunque la somma

$$\begin{vmatrix} d\xi_3 & dx_3 \\ \delta\xi_3 & \delta x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d\xi_2 & dx_2 \\ \delta\xi_2 & \delta x_2 \end{vmatrix}.$$

Ponendo

$$d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial u} du + \frac{\partial \xi_i}{\partial v} dv \, , \; \delta\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \xi_i}{\partial u} \delta v , \text{ ecc.}$$

vediamo subito che questa somma è uguale a

$$(du\, \delta v - \delta u\, dv) \left(\frac{\partial x_2}{\partial v} \frac{\partial \xi_2}{\partial u} + \frac{\partial x_3}{\partial v} \frac{\partial \xi_3}{\partial u} - \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial \xi_2}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial \xi_3}{\partial v} \right)$$

e ricordiamo che, mutando il verso del parallelismo, tutto resta inalterato, eccettochè questa somma si deve considerare col segno mutato, come dimostra un facile calcolo. Ora (come si notò per calcolare le coordinate di P', P'', π', π'') è per noi

$$dx_1 = dx_4 = d\xi_1 = d\xi_4 = 0 \, ;$$

quindi con le notazioni del Fibbi, ricordate più su, si vede che la somma precedente si può scrivere

$$\pm (f - f') (du\, \delta v - \delta u\, dv)$$

dove il doppio segno corrisponde per quanto si è detto al doppio senso del parellelismo. Si ha dunque

$$(\alpha) \qquad 6\, d\omega'' = 6\, d\omega + 6\, d\omega' \pm (f' - f) (du\, \delta v - \delta v\, du) \, .$$

La formula notata più su che dà $d\omega$, diventa, poichè

$$\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2 = \left(x \, , \, \xi \, , \, \frac{\partial x}{\partial u} \, , \, \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2$$

(dove col simbolo tra parentesi si indica al solito un determinante del IV ordine (§. 3)) e poichè $dx_1 = dx_4 = d\xi_1 = d\xi_4 = 0$

$$(\beta) \qquad 6\, d\omega = \sqrt{\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2}\, (du\, \delta v - \delta u\, dv) .$$

La (α) e la (β) danno il seguente teorema:

Una delle due densità di Clifford di una congruenza in un punto differisce dalla corrispondente densità del Fibbi aumentata della cur-

vatura dello spazio ambiente per

$$\pm (f - f') \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}$$

a meno d'un fattore numerico.

La densità assoluta di una congruenza in un punto è eguale alla curvatura dello spazio ambiente aumentata della densità del Fibbi nello stesso punto.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le due densità di Clifford siano uguali è che $f = f'$, cioè che la congruenza sia normale (teorema che presto ritroveremo sotto forma più opportuna).

Si trova qui generalizzato a congruenze qualunque il fatto che per una superficie si definiscono due curvature; e noi possiamo dire che:

La curvatura relativa e la curvatura assoluta di una superficie in un punto P *non sono altro che la densità* del Fibbi *e la densità assoluta della corrispondente congruenza normale nel punto* P. *Questa ultima densità è uguale poi alla densità destrorsa e alla sinistrorsa della congruenza stessa nel punto* P.

Sulla teoria delle superficie.

§. 14. Già abbiamo dai paragrafi precedenti alcuni teoremi sulle superficie, che noi ritroveremo qui in modo diretto, senza valerci delle formule generali ottenute nella breve scorsa sulla teoria delle congruenze.

Siano con le notazioni solite

$$E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2 \ , \quad D\, du^2 + 2\, D'\, du\, dv + D''\, dv^2$$

le due forme fondamentali di una superficie (Bianchi A); e ne siano (x_i) e (ξ_i) le coordinate di un punto generico e del corrispondente piano tangente. Avremo per elemento lineare dell'immagine di Clifford della corrispondente congruenza normale:

$$ds'^2 = \sum (d\,[x, \xi]_i)^2 = \sum ([dx, \xi]_i)^2 + \sum ([x, d\xi]_i)^2 + 2 \sum [dx, \xi]_i\, [x, d\xi]_i.$$

Si sviluppi con le solite identità, lasciando i determinanti con due linee uguali; avremo

$$ds'_2 = \sum dx^1 + \sum d\xi^2 \pm 2 \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 & d\xi_4 \end{vmatrix}$$

dove è facile verificare che il doppio segno è dovuto al doppio senso del parallelismo. Ora è (Bianchi, loc. cit.).

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = \frac{\mathrm{F\,D'} - \mathrm{G\,D}}{\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2} \frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\mathrm{F\,D} - \mathrm{E\,D'}}{\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2} \frac{\partial x_i}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial v} = \frac{\mathrm{F\,D''} - \mathrm{G\,D}}{\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2} \frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\mathrm{F\,D'} - \mathrm{E\,D''}}{\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2} \frac{\partial x_i}{\partial v} .$$

Usando di queste formule e ricordando che

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_4}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_4}{\partial v} \\ x_1 & \cdots\cdots & x_4 \\ \xi_1 & \cdots\cdots & \xi_4 \end{vmatrix}^2 = \mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2$$

si ottiene che

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_4}{\partial u} \\ x_1 & \cdots\cdots & x_4 \\ \xi_1 & \cdots\cdots & \xi_4 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \cdots\cdots & \frac{\partial \xi_4}{\partial u} \end{vmatrix} = \pm \frac{\mathrm{F\,D} - \mathrm{E\,D'}}{\sqrt{\mathrm{E\,G} - \mathrm{F}^2}}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_4}{\partial u} \\ x_1 & \cdots\cdots & x_4 \\ \xi_1 & \cdots\cdots & \xi_4 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} & \cdots\cdots & \frac{\partial \xi_4}{\partial v} \end{vmatrix} = \pm \frac{\mathrm{F D'} - \mathrm{E D''}}{\sqrt{\mathrm{E G} - \mathrm{F}^2}} .$$

Analogamente

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_4}{\partial v} \\ x_1 & \cdots\cdots & x_4 \\ \xi_1 & \cdots\cdots & \xi_4 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} & \cdots\cdots & \frac{\partial \xi_4}{\partial v} \end{vmatrix} = \mp \frac{\mathrm{F D''} - \mathrm{G D'}}{\sqrt{\mathrm{E G} - \mathrm{F}^2}}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_4}{\partial v} \\ x_1 & \cdots\cdots & x_4 \\ \xi_1 & \cdots\cdots & \xi_4 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \cdots\cdots & \frac{\partial \xi_4}{\partial u} \end{vmatrix} = \mp \frac{\mathrm{F D'} - \mathrm{G D}}{\sqrt{\mathrm{E G} - \mathrm{F}^2}}$$

dove i segni superiori (inferiori) vanno presi insieme. Sviluppando il valore di ds'^2 con le formule or ora ottenute abbiamo infine:

$$ds'^2 = e\, du^2 + 2 f\, du\, dv + g\, dv^2$$

dove, con le solite notazioni delle superficie,

$$e = \mathrm{E} + \mathrm{E'} \pm 2 \frac{\mathrm{F D} - \mathrm{E D'}}{\sqrt{\mathrm{E G} - \mathrm{F}^2}}$$

$$f = \mathrm{F} + \mathrm{F'} \pm \frac{\mathrm{G D} - \mathrm{E D''}}{\sqrt{\mathrm{E G} - \mathrm{F}^2}}$$

$$g = \mathrm{G} + \mathrm{G'} \mp \frac{\mathrm{F D''} - \mathrm{G D'}}{\sqrt{\mathrm{E G} - \mathrm{F}^2}} .$$

Qui di nuovo vanno insieme i segni superiori (inferiori) e l'ambiguità del segno è dovuta al doppio senso del parallelismo. E si noti che:

La parte di segno costante e la parte di segno variabile di ds'^2 potrebbero servire come forme individuanti un sistema di superficie parallele.

La parte di segno costante è evidentemente *la somma dei quadrati degli elementi lineari corrispondenti sulle due superficie polari;* quanto alla parte di segno variabile si verifica facilmente che anche nello spazio ellittico *la torsione geodetica di una curva nel punto* A (torsione della geodetica tangente in A) *è data da* $\frac{1}{T}+\frac{d\sigma}{ds}$ (dove T è la torsione, s l'arco, σ l'angolo con la normale alla superficie della normale principale della curva stessa) *che essa è nulla per le linee di curvatura ed è data anche da*

$$\frac{(FD-ED')\,du^2+(GD-ED'')\,du\,dv+(GD'-FD'')\,dv^2}{\sqrt{EG-F^2}\,(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)}.$$

Si ha allora che la torsione geodetica di un elemento di curva è uguale a meno di un fattore numerico alla parte variabile dei quadrati degli elementi lineari di Clifford della superficie (cioè *alla differenza dei quadrati dei due archetti immagine) divisa per il quadrato della lunghezza dell'elemento stesso.*

Siano ora le u, v le linee di curvatura della superficie; ricordando le equazioni di Codazzi, otteniamo in tal caso

$$e=\frac{E}{\operatorname{sen}^2 w_2}=E\left(1+\frac{1}{r_2^2}\right)$$

$$f=\pm\sqrt{EG}\,(\operatorname{cotg} w_1-\operatorname{cotg} w_2)=\pm\sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$g=\frac{G}{\operatorname{sen}^2 w_1}=G\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right)$$

dove r_1, r_2 sono i raggi di curvatura della superficie.

Queste formule sono tanto importanti per noi che non sarà male il ritrovarle in un altro modo, che avrà il vantaggio di mostrarci quanto sia conforme alla natura intima dello spazio ellittico il concetto di parametri di scorrimento di una retta.

§. 15. Formino le $u = \text{cost.}$ e le $v = \text{cost}$ un sistema ortogonale e siano rispettivamente $(X_1 Y_1 Z_4)$, $(X_2 Y_2 Z_2)$, (X_3, Y_3, Z_3) i parametri di scorrimento (in un certo verso) della tangente alla $v = \text{cost.}$, della tangente alla $u = \text{cost.}$, e della normale alla superficie in un suo punto generico (x_i). È facile scriverne l'espressione effettiva; e se ne formiamo le derivate rispetto u, v ricordando le relazioni tra i parametri di rette polari e le formule che danno le derivate seconde delle x_i e le derivate prime delle $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ otteniamo il seguente quadro di formule:

$$dX_1 = \left[-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial v} X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}} X_3 \right] du + \left[\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u} X_2 + \left(\frac{D'}{\sqrt{E}} \pm \sqrt{G} \right) X_3 \right] dv$$

$$dX_2 = \left[\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial E}{\partial v} X_1 + \left(\frac{D'}{\sqrt{G}} \mp \sqrt{E} \right) X_3 \right] du + \left[-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial u} X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} X_3 \right] dv$$

$$dX_3 = \left[\left(\pm\sqrt{E} - \frac{D'}{\sqrt{G}} \right) X_2 - \frac{D}{\sqrt{E}} X_1 \right] du + \left[\left(\mp\sqrt{G} - \frac{D'}{\sqrt{E}} \right) X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}} X_2 \right] dv$$

con le solite considerazioni riguardo ai segni. Queste formule sono perfettamente analoghe alle corrispondenti dello spazio euclideo che se ne deducono ponendo D' per $D' \pm \sqrt{EG}$.

La determinazione effettiva di una superficie di cui siano date le forme fondamentali si riduce all'integrazione di due sistemi di equazioni ai differenziali totali, ciascuno riducibile poi a un'equazione di Riccati.

Così anche nello spazio curvo, come nell'euclideo, si ha

$$D\, du^2 + 2 D'\, du\, dv + D''\, dv^2 = -\sum (\sqrt{E}\, X_1\, du + \sqrt{G}\, X_2\, dv)\, dX_3 .$$

Così affinchè una retta di parametri $\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3$ (λ, μ, ν costanti) per il punto (x_i) generi una sviluppabile quando ci si sposti

lungo una $v = \text{cost.}$ devono essere uguali le immagini sferiche della rigata generata, cioè se $D' = F = 0$

$$\lambda \left(\mu D + \nu \frac{\frac{\partial E}{\partial v}}{2 \sqrt{G}} \right) = 0 .$$

E se ciò avviene invece spostandoci lungo una $u = \text{cost.}$ è

$$\mu \left(\lambda D'' + \nu \frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{2 \sqrt{E}} \right) = 0 .$$

Con l'aiuto del quadro di formule precedente possiamo risolvere un'altra questione: determinare cioè le congruenze i cui raggi trascinati in una qualunque deformazione di una superficie di partenza alla quale si immaginino invariabilmente collegati, formano sempre ∞' rigate di Clifford o, ciò che è lo stesso, formano una congruenza per cui una delle immagini di Clifford è degenere. Se le u, v sono rispettivamente le linee normali ai raggi tracciate sulla superficie Σ di partenza e le loro traiettorie ortogonali, i parametri di scorrimento di un raggio generico della congruenza sono

$$X = \cos\varphi X_1 + \operatorname{sen}\varphi X_3 , \quad Y = \cos\varphi Y_1 + \operatorname{sen}\varphi Y_3 , \quad Z = \cos\varphi Z_1 + \operatorname{sen}\varphi Z_3$$

dove φ è funzione di u, v. L'elemento lineare della immagine di Clifford ottenuta nel senso in cui si sono calcolati X, Y, Z è dato da

$$ds'^2 = \left[\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 + 2 \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} du\, dv + \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 dv^2 ;$$

ora è facile calcolare, appunto col quadro di formule di questo paragrafo, che

$$\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 = \frac{D^2}{E} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + 2 \frac{D}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\varphi \frac{D' \mp \sqrt{EG}}{\sqrt{G}} \right)^2$$

$$\sum \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{D' \pm \sqrt{EG}}{\sqrt{E}} \right)^2 + \left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \operatorname{sen}\varphi \frac{D''}{\sqrt{G}} \right)^2$$

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\left(\frac{D' \pm \sqrt{EG}}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) -$$

$$- \left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\varphi \frac{D' \mp \sqrt{EG}}{\sqrt{EG}}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \operatorname{sen}\varphi \frac{D''}{\sqrt{G}}\right).$$

Affinchè l'immagine di Clifford corrispondente sia degenere, deve essere

$$\left[\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2\right]\left[\sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\right] - \left(\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = 0$$

cioè deve essere nullo (il quadrato di)

$$\left(\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\left(\cos\varphi \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \operatorname{sen}\varphi \frac{D''}{\sqrt{G}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{D' \pm \sqrt{EG}}{\sqrt{E}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \operatorname{sen}\varphi \frac{D' \mp \sqrt{EG}}{\sqrt{G}}\right).$$

Si sviluppi ricordando che, se K è la curvatura della superficie di partenza, è

$$\frac{DD''}{\sqrt{EG}} - \frac{D' \pm \sqrt{EG}}{\sqrt{E}}\frac{D' \mp \sqrt{EG}}{\sqrt{G}} = \sqrt{EG}\,K$$

e si avrà

$$-\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{D''}{\sqrt{G}} + \frac{\cos\varphi}{E} D \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{E}}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{G}}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} +$$

$$+ \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{D' \mp \sqrt{EG}}{\sqrt{G}} + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\frac{D' \pm \sqrt{EG}}{\sqrt{E}} - \operatorname{sen}\varphi\, K \sqrt{EG} = 0\,.$$

Si moltiplichi per D, si sostituisca a D D″ il suo valore dedotto dalla penultima formula; il risultato dovrà esser identicamente nullo

in $D_1 D'$. Così sarà in primo luogo

$$\frac{\cos\varphi}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0 .$$

Per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si riconosce subito che $K = 0$ e si hanno *le normali a una superficie di curvatura nulla;* per $\cos\varphi \neq 0$, deve essere G funzione solo di v; dovendo poi esser nullo anche il coefficiente di D', sarà $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0$. Analogamente otteniamo infine

$$\frac{\partial \log \cos\varphi}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}$$

$$\frac{\cos\varphi}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial\varphi}{\partial v} - \operatorname{sen}\varphi\, K \sqrt{EG} \pm \sqrt{EG} \left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{G}} \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right) = 0 .$$

Se φ è costante (che però noi supporremo sempre non nulla) si può fare $E = G = 1$ e si ottengono *le rette inclinate d'un angolo costante su una superficie Σ a curvatura nulla e normali nel punto comune con Σ alla geodetica di un sistema (di ∞^1 geodetiche parallele) che passa per il punto stesso.*

Se φ non è costante, si pone $\varphi = v$, $E = \cos^2\varphi = \cos^2 v$ e l'ultima equazione diventa successivamente:

$$\frac{\operatorname{sen} v \cos v}{\sqrt{G}} + \operatorname{sen} v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\operatorname{sen} v}{\sqrt{G}} \right) \pm 2 \operatorname{sen} v \cos v = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\operatorname{sen} v}{\sqrt{G}} \right) + \operatorname{cotg} v \left(\frac{\operatorname{sen} v}{\sqrt{G}} \right) \pm 2 \cos v = 0 .$$

Da cui

$$\frac{\operatorname{sen} v}{\sqrt{G}} = \pm \frac{1}{\operatorname{sen} v} \left(2 \int \operatorname{sen} v \cos v \, dv + C \right)$$

$$\sqrt{G} = \pm \frac{2 \operatorname{sen}^2 v}{\cos 2v + C} ,$$

dove C è una costante.

Otteniamo così come superficie di partenza una superficie di rotazione (o una sua deformata) che al limite diventa appunto una delle superficie di Weingarten che si presentano nello studio diretto per lo spazio euclideo.

Dopo questa ricerca, osserviamo ora che basta porre

$$D' = 0$$

nel quadro di formule di questo paragrafo e formare la somma $\Sigma\, dX_3^2$ per ottenere appunto di nuovo l'elemento lineare del §. 14, come volevamo.

E qui osserviamo che il termine in $du\, dv$ col doppio segno, che a prima vista può fare meraviglia quando si ricordino le cose analoghe per lo spazio euclideo e iperbolico, *è invece cosa prevedibile* " a priori " *perchè le* $u =$ cost., $v =$ cost. *sono appunto le sviluppabili della congruenza delle normali alla superficie* (§. 11).

§. 16. Ora noi ci facciamo la seguente domanda:

Date le due immagini piane di una congruenza (in corrispondenza biunivoca) *come riconosceremo se la congruenza è normale?*

Intanto dallo studio fatto, quando per le $u =$ cost., $v =$ cost. siano prese le linee di curvatura di una superficie, vediamo che *è condizione necessaria che le immagini si corrispondano con equivalenza delle aree.* Dimostriamo ora viceversa che, *se le immagini sono tali che siano equivalenti due parti corrispondenti qualunque, la congruenza è normale oppure duale di una congruenza normale* (questa ultima proprietà non è per nulla contraria alla generalità del risultato, perchè congruenze duali hanno le stesse immagini di Clifford). (Cf. §. 13). Infatti, se le $u =$ cost. e le $v =$ cost. sono le sviluppabili della nostra congruenza (le linee che corrispondono con uguaglianza d'arco sulle due immagini di Clifford e che dimostreremo reali) allora la parte di segno variabile dell'elemento lineare delle immagini di Clifford si riduce al più al termine in *du dv;* e, se le due immagini si corrispondono nel modo supposto, sarà nullo il termine in " *du dv* " o nella parte di segno costante, o in quella di

segno variabile. In quest'ultimo caso la congruenza è a sviluppabili indeterminate, cioè è formata dalle rette normali a un piano; nell'altro caso è $F + F' = 0$; siano ora

$$ds^2 = A\,du^2 + 2\,B\,du\,dv + C\,dv^2\,,\quad D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

le forme fondamentali di una delle falde focali della congruenza luogo del fuoco $(x_1\,x_2\,x_3\,x_4)$ e siano $\xi_i = \frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial x_i}{\partial u}$ i coseni di direzione del raggio per x_i; sarà $E = F = 0$; e affinchè $F + F' = 0$ dovrà essere

$$F' = \sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \left(\sum x \frac{\partial \xi}{\partial u}\right)\left(\sum x \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) =$$

$$= \sum \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial x}{\partial u}\right]\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial x}{\partial u}\right] - \left(\sum \xi \frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\sum \xi \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0.$$

Ora è

$$\left(\sum \xi \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \sqrt{A}\;;\quad \left(\sum \xi \frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{B}{\sqrt{A}}\;;\quad \left(\sum \xi \frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\sum \xi \frac{\partial x}{\partial v}\right) = B.$$

E così si ha:

$$\frac{1}{4\,A^2}\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{1}{A}\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - B = 0\,.$$

Ricordando che $D' = 0$ si ha, detti $(X_1\,X_2\,X_3\,X_4)$ i coseni di direzione della normale alla superficie, che:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} - A\,x + D\,X$$

dove i simboli di Christoffel sono riferiti alla forma

$$A\,du^2 + 2\,B\,du\,dv + C\,dv^2.$$

Si ricava:

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial C}{\partial u} + A\,B$$

cosicchè si ha in fine (poichè $A \mp 0$)

$$-\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v} + 2A^2\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial A}{\partial v} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial C}{\partial u} = 0$$

e poichè

$$AC - B^2 \mp 0 \;, \quad A \mp 0$$

si ha

$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0 .$$

Se $\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0$ le $v = \text{cost.}$ sono geodetiche e la congr. è normale; se $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0$ sarà per la superficie duale $\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = 0$ e la congruenza duale è normale.

Basta adunque far vedere che, come si ammise, le linee d'ugual lunghezza in una tale corrispondenza d'una sfera euclidea in sè stessa sono reali (nel qual caso si ha certo, come si suppose, $A \mp 0$); infatti supposti i due elementi lineari riferiti al sistema *reale* ortogonale comune, essi assumono la forma $\bar{E}\,du^2 + \bar{G}\,dv$, $\bar{E}'\,du^2 + \bar{G}'\,dv$; e le linee in discorso sono date da

$$(\bar{E} - \bar{E}')\,du^2 + (\bar{G} - \bar{G}')\,dv^2 = 0 .$$

Poichè $\bar{E}\,\bar{G} = \bar{E}'\,\bar{G}'$ non possono le differenze $\bar{E} - \bar{E}'$, $\bar{G} - \bar{G}'$ avere lo stesso segno, essendo $\bar{E}$, $\bar{G}$, $\bar{E}'$, $\bar{G}'$ positive; quindi queste linee sono certo reali. Questa dimostrazione della realità di tali linee mi fu gentilmente comunicata dal prof. Bianchi.

§. 17. Noi abbiamo dato in generale le condizioni cui devono soddisfare le forme del Fibbi perchè corrispondano realmente a una congruenza; non sarà quindi inopportuno il verificarle per la congruenza delle normali a una superficie, almeno quando per le $u = \text{cost.}$, e le $v = \text{cost.}$ si siano scelte le linee di curvatura. Esprimiamo infatti che il complesso dei termini che compaiono nell'espressione

della curvatura di

$$e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

e che contengono linearmente " f " e le sue derivate è nullo; ciò che deve avvenire nel nostro caso perchè scambiando il segno di f l'elemento resta ancora un elemento sferico; otterremo

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{1+\frac{1}{r_1 r_2}}\right]\frac{\partial \log\left[E\left(1+\frac{1}{r_2^2}\right)\right]}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{1+\frac{1}{r_1 r_2}}\right]\frac{\partial \log\left[E\left(1+\frac{1}{r_2^2}\right)\right]}{du}+$$

$$+2\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\right]}{\sqrt{EG}\left(1+\frac{1}{r_1 r_2}\right)}\right]=0.$$

Il terzo termine di questa somma è

$$\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{1+\frac{1}{r_1 r_2}}\left\{\frac{\partial^2 \log E}{\partial u\,\partial v}+2\frac{\partial^2 \log\left[\sqrt{G}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\right]}{\partial u\,\partial v}\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{1+\frac{1}{r_1 r_2}}\right]\left\{\frac{\partial \log E}{\partial u}+2\frac{\partial \log\left[\sqrt{G}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\right]}{\partial u}\right\}.$$

Unendo i termini che contengono E e quelli che contengono G, l'uguaglianza precedente diventa dunque

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{1+\frac{1}{r_1 r_2}}\frac{\partial \log E}{\partial v}\right]+2\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{1+\frac{1}{r_1 r_2}}\frac{\partial \log\left\{\sqrt{G}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\right\}}{\partial u}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{1+\frac{1}{r_1 r_2}}\right)\frac{\partial \log\left(1+\frac{1}{r_2^2}\right)}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}{1+\frac{1}{r_1 r_2}}\right)\frac{\partial \log\left(1+\frac{1}{r_2^2}\right)}{\partial u}=0.$$

Sostituendo poi a $\frac{\partial \log E}{\partial v}$, $\frac{\partial \log G}{\partial u}$ i valori dati dalle formule di Codazzi si ottiene un'identità in $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$.

Tolti i termini così dimostrati nulli, per far vedere che la curvatura dell'elemento è $+1$, basta far vedere che:

$$1 = \frac{-1}{2\sqrt{EG}\left(1+\frac{1}{r_1 r_2}\right)}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{EG}\left(1+\frac{1}{r_1 r_2}\right)}\frac{\partial\left[G\left(1+\frac{1}{r_1^2}\right)\right]}{\partial u}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{EG}\left(1+\frac{1}{r_1 r_2}\right)}\frac{\partial\left[E\left(1+\frac{1}{r_2^2}\right)\right]}{\partial v}\right]\right\}.$$

Sostituendo a $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right)$, $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right)$ i valori ricavati dalle equazioni di Codazzi, l'equazione precedente diventa l'equazione di Gauss

$$1+\frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}.$$

L'avere qui 2 equazioni in luogo di 3 (2 di Codazzi e 1 di Gauss) è dovuto all'essere sottintesa la $f+f'=0$ che esprime essere equivalenti parti corrispondenti delle due immagini.

§. 18. L'angolo che due elementi corrispondenti (su due superficie polari) AA', BB' formano tra di loro è subito misurato quando si pensi (§. 2) che la direzione BB'' coniugata di BB' in B è appunto la retta duale di AA' ed è quindi parallela ad AA' nei due sensi; quindi gli angoli di AA' con BB' sono *uguali o supplementari* a quelli di BB' con BB''.

Se AA' *è tangente a una linea di curvatura per* A, *essa è normale a* BB' *in ambedue in sensi* (e quindi incontra BB'). Ora noi vogliamo studiare ciò che avviene per l'angolo φ di elementi corrispondenti su una superficie e sulla immagine piana (costruita in un

certo senso). Prenderemo a linee u, v le linee di curvatura e misureremo φ nel medesimo senso con cui fu costruita l'immagine piana. Per la singolarità del risultato faremo i calcoli in due modi, di cui l'uno darà sotto forma razionale $\cos\varphi$, l'altro $\operatorname{sen}\varphi$. Sia $(Y_1\, Y_2\, Y_3\, 0)$ il punto immagine del punto (x_i) della superficie relativamente al piano $x_4 = 0$ e siano (X_i) i coseni di direzione della parallela condotta per (Y) all'elemento uscente da (x) coi coseni di direzione $\left(\frac{dx}{ds}\right)$; avremo, indicando con $d\sigma$ l'arco corrispondente dell'immagine piana

$$\cos\varphi = \frac{\sum X\, dY}{d\sigma} = \frac{1}{ds\, d\sigma} \begin{vmatrix} dY_1 & Y_1 & [dx, x]_1 \\ dY_2 & Y_2 & [dx, x]_2 \\ dY_3 & Y_3 & [dx, x]_3 \end{vmatrix}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{ds^2 d\sigma^2} \begin{vmatrix} d\sigma^2 & 0 & \sum [dx, x]\, d[\xi, x] \\ 0 & 1 & \sum [dx, x]\ [\xi, x] \\ \sum [dx, x]\ d[\xi, x] & \sum [\xi, x]\, [dx, x] & ds^2 \end{vmatrix}$$

e, ricordando le solite identità:

$$\cos\varphi = 1 - \left(\frac{\sum (dx, x)\, d(\xi, x)}{ds\, d\sigma}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\sum [dx, x]\, [x, d\xi]}{d\sigma\, ds}\right)^2 =$$

$$= 1 - \left(\frac{\sum dx\, d\xi}{ds\, d\sigma}\right)^2,$$

donde

$$\operatorname{sen}\varphi = \pm \frac{\sum dx\, d\xi}{ds\, d\sigma}.$$

Valendoci ora delle notazioni e delle formule nel quadro del §. 15 troveremo $\cos\varphi$ sotto forma razionale.

La terza formula di questo quadro dà

$$\frac{dX_3}{d\sigma} = \left(\pm \sqrt{E}\, X_2 - \frac{D}{\sqrt{E}}\, X_1\right) \frac{du}{d\sigma} + \left(\mp \sqrt{G}\, X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}}\, X_2\right) \frac{dv}{d\sigma}.$$

I parametri di scorrimento della retta unente il punto (u,v) della superficie al punto $(u + du,\ v + dv)$ sono

$$\sqrt{E}\,\frac{du}{ds}\,X_1 + \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}\,X_2 .$$

Si ha con le nuove notazioni

$$\cos\varphi = \frac{1}{ds\,d\sigma}\begin{vmatrix} dX_3 & X_3 & \sqrt{E}\,du\,X_1 + \sqrt{G}\,dv\,X_2 \\ dY_3 & Y_3 & \sqrt{E}\,du\,Y_1 + \sqrt{G}\,dv\,Y_2 \\ dZ_3 & Z_3 & \sqrt{E}\,du\,Z_1 + \sqrt{G}\,dv\,Z_2 \end{vmatrix} .$$

Si sdoppi in due determinanti il secondo membro, sostituendo poi a dX_3, dY_3, dZ_3 i loro valori; otterremo

$$\cos\varphi = \frac{1}{ds\,d\sigma}\left\{\sqrt{E}\,du\left(\pm\sqrt{E}\,du - \frac{D''}{\sqrt{G}}\,dv\right)\begin{vmatrix} X_2 & X_3 & X_1 \\ Y_2 & Y_3 & Y_1 \\ Z_2 & Z_3 & Z_1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{G}\,dv\left(-\frac{D}{\sqrt{E}}\,du \mp \sqrt{G}\,dv\right)\begin{vmatrix} X_1 & X_3 & X_2 \\ Y_1 & Y_3 & Y_2 \\ Z_1 & Z_3 & Z_2 \end{vmatrix}\right\} .$$

Questi due determinanti sono uguali uno a $+1$, l'altro a -1; dunque

$$\cos\varphi = \pm\frac{1}{ds\,d\sigma}\left(E\,du^2 \pm \sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)du\,dv + G\,dv^2\right) .$$

Dalle formule che danno $\cos\varphi$, $\operatorname{sen}\varphi$ (che immediatamente si riconoscono equivalenti) abbiamo:

Le assintotiche sono caratterizzate da ciò che la tangente in un punto è parallela alla tangente nel punto corrispondente alla curva immagine.

Le linee di curvatura sono caratterizzate dal venir spostate di angoli uguali nelle due immagini piane.

Per le assintotiche essendo dunque $\cos\varphi = 1$, si vede che queste proprietà sono affatto differenti dalle analoghe per lo spazio euclideo.

§. 19. Notiamo che

$$e\,g - f^2 = \mathrm{E}\,\mathrm{G}\left(1 + \frac{1}{r_1\,r_2}\right)^2.$$

Dunque

Il rapporto delle aree dei due elementi infinitesimi corrispondenti sul piano immagine e sulla superficie (intorni dei punti A′, A *corrispondenti), è uguale alla curvatura della forma quadratica dante l'elemento lineare della superficie nel punto* A, *cioè alla curvatura assoluta della superficie.*

Invece la curvatura relativa è data dal rapporto di elementi infinitesimi di due superficie duali.

Come si vede avviene un fatto analogo a quello che si presenta per la torsione delle curve; ciò che unito ai fatti enumerati in questi paragrafi, dà luogo all'osservazione che le proprietà della parallele dello spazio euclideo sembrano in molti casi sdoppiarsi in due classi, l'una di proprietà che si conservano nello spazio iperbolico, l'altra di proprietà che si conservano nello spazio ellittico. Si osservi ora che:

L'angolo delle linee immagini delle linee di curvatura è dato dal complemento di $\pm(w_1 - w_2)$ *a seconda del senso del parallelismo.*

Notiamo ancora esplicitamente un risultato altrove accennato:

Per le superficie a curvatura nulla e per esse sole *l'immagine piana è degenere.* La prima parte di questo teorema si poteva prevedere, notando che le assintotiche di una tal superficie sono a torsione ± 1.

Così, come la media dei quadrati delle torsioni delle assintotiche in A è uguale alla curvatura relativa della superficie in A, così *la media dei quadrati delle torsioni di Clifford è uguale alla curvatura assoluta.*

I sistemi ortogonali della superficie che tali si conservano nell'immagine piana sono dati da

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}\,du & \mathrm{G}\,dv \\ \dfrac{\mathrm{E}}{\operatorname{sen}^2 w_2}\,du \pm \sqrt{\mathrm{E}\mathrm{G}}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) dv & \dfrac{\mathrm{G}}{\operatorname{sen}^2 w_1}\,dv \pm \sqrt{\mathrm{E}\mathrm{G}}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right) du \end{vmatrix} = 0$$

cioè da

$$\pm\sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)(E\,du^2-G\,dv^2)+E\,G\,du\,dv\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 w_1}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 w_2}\right)=0\,.$$

Per le superficie minime si ha $w_1+w_2=0$; dunque:

Per le superficie ad area minima le assintotiche, che formano un sistema ortogonale sulla superficie tali si conservano nelle immagini piane.

§. 20. Ora, seguendo i consigli del prof. Bianchi, applicherò i risultati precedenti alle superficie W.

Sia

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2$$

l'elemento lineare di una tal superficie, quando le u, v siano le linee di curvatura; essendo identiche le formule di Codazzi per lo spazio nostro e per lo spazio ellittico, le formule di Weingarten varranno anche qui; cosicchè posto

$$E=\frac{1}{\beta^2}\ ,\quad G=\frac{1}{\theta'^2(\beta)}$$

con

$$\frac{1}{r_2}=\theta(\beta)\ ,\quad \frac{1}{r_1}=\theta(\beta)-\beta\,\theta'(\beta)$$

avremo per l'elemento lineare dell'immagine piana:

$$e=\frac{1+\theta^2(\beta)}{\beta^2}\ ,\quad f=\pm 1\ ,\quad g=\frac{1+[\theta(\beta)-\beta\,\theta'(\beta)]^2}{\theta'^2(\beta)}$$

cioè:

Per una superficie W *è* $f=$ cost., *ed* " e " *è funzione di* " g "; la determinazione delle superficie W è così ricondotta alla ricerca di tutti i siffatti elementi lineari del piano ellittico o della *sfera euclidea.*

Viceversa, soddisfatte queste condizioni, si potranno scrivere le formule precedenti; e allora per l'osservazione di Weingarten sono soddisfatte le equazioni di Codazzi, e per un calcolo precedente è soddisfatta l'equazione di Gauss.

Ma noi vorremo esaminare più precisamente questo risultato, e vedremo il fatto notevolissimo che delle due condizioni " $f=$ cost. " ed " e funzione di g ", l'una è conseguenza dell'altra quando già si sappia che

$$e\,du^2+2\,f\,du\,dv+g\,dv^2$$

è l'elemento lineare di una delle immagini di una superficie riferita alle linee di curvatura. Infatti poichè le u, v sono le linee immagini delle linee di curvatura, l'elemento sferico

$$e\,du^2+2\,f\,du\,dv+g\,dv^2$$

deve rimanere a curvatura $+1$, cambiando il segno di f. Ricordando che f è costante, e sottraendo l'una dall'altra le equazioni che esprimono essere uguali a $+1$ le curvature delle forme

$$e\,du^2\pm 2\,f\,du\,dv+g\,dv^2,$$

otteniamo (ponendo per semplicità $f=1$)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{e\sqrt{eg-1}}\frac{\partial e}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{e\sqrt{eg-1}}\frac{\partial e}{\partial u}\right)=0$$

cioè:

$$\frac{\partial\left(e\sqrt{eg-1}\right)}{\partial u}\frac{\partial e}{\partial v}-\frac{\partial\left(e\sqrt{eg-1}\right)}{\partial v}\frac{\partial e}{\partial u}=0$$

donde

$$\frac{\partial\,(eg)}{\partial u}\frac{\partial e}{\partial v}-\frac{\partial\,(eg)}{\partial v}\frac{\partial e}{\partial u}=0$$

ossia

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial e}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial e}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}=0$$

Dunque il nostro teorema si può enunciare nella forma seguente:

La ricerca delle superficie W *dello spazio ellittico si riconduce alla ricerca degli elementi lineari della sfera euclidea per cui f è costante e che restano a curvatura $+1$ mutando il segno di f.*

Così si spiega l'origine della condizione dei teoremi di Weingarten dello spazio euclideo " *che sia e funzione di g* ".

Di più noi vediamo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie sia W *è che si possa fare:*

$$\sqrt{\mathrm{EG}}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\text{cost.}\neq 0$$

Se f è costante non nulla ed e e g sono funzioni tali della u o della v, che non mutano valore scambiando " u " in " − u ", o " v " in " − v " l'elemento lineare corrisponde all'immagine piana di una superficie W.

Infatti scambiando u in $-u$ (oppure v in $-v$) e e g non mutano di valore, mentre f cambia solo di segno; e ci troviamo quindi in presenza di due forme a curvatura $+1$ che differiscono solo per il segno di f costante.

Dobbiamo ora risolvere esplicitamente una questione, già accennata altre volte, di costruire cioè per quadrature una superficie di cui siano date le immagini piane; il processo è affatto differente da quello che si segue nello spazio euclideo, ma ancora più semplice.

Siano $(\mathrm{Y}_1\,\mathrm{Y}_2\,\mathrm{Y}_3\,0)$ e $(\mathrm{Z}_1\,\mathrm{Z}_2\,\mathrm{Z}_3\,0)$ due punti corrispondenti delle due immagini piane sul piano $x_4=0$. Scegliendo il piano $x_4=0$ come superficie di partenza della corrispondente congruenza normale avremo (§. 4) per un raggio generico di questa congruenza

$$x_1=\frac{\mathrm{Y}_1+\mathrm{Z}_1}{\sqrt{2(1+\Sigma\,\mathrm{YZ})}},\quad x_2=\frac{\mathrm{Y}_2+\mathrm{Z}_2}{\sqrt{2(1+\Sigma\,\mathrm{YZ})}},\quad x_3=\frac{\mathrm{Y}_3+\mathrm{Z}_3}{\sqrt{2(1+\Sigma\,\mathrm{YZ})}},\quad x_4=0$$

$$\xi_1=\frac{\mathrm{Y}_3\mathrm{Z}_2-\mathrm{Y}_2\mathrm{Z}_3}{\sqrt{2(1+\Sigma\,\mathrm{YZ})}},\quad \xi_2=\frac{\mathrm{Y}_1\mathrm{Z}_3-\mathrm{Z}_1\mathrm{Y}_3}{\sqrt{2(1+\Sigma\,\mathrm{YZ})}},\quad \xi_3=\frac{\mathrm{Y}_2\mathrm{Z}_1-\mathrm{Y}_1\mathrm{Z}_2}{\sqrt{2(1+\Sigma\,\mathrm{YZ})}},\quad \xi_4=-\sqrt{\frac{1+\Sigma\,\mathrm{YZ}}{2}}.$$

Per essere questa congruenza normale, potremo porre

$$dw=-\sum \xi_i\, dx_i$$

$$w=\int\frac{\begin{vmatrix} d(\mathrm{Y}_1+\mathrm{Z}_1) & d(\mathrm{Y}_2+\mathrm{Z}_2) & d(\mathrm{Y}_3+\mathrm{Z}_3)\\ \mathrm{Y}_1 & \mathrm{Y}_2 & \mathrm{Y}_3\\ \mathrm{Z}_1 & \mathrm{Z}_2 & \mathrm{Z}_3\end{vmatrix}}{2\left(1+\sum \mathrm{YZ}\right)}$$

e per il punto generico (x) di una delle ∞' corrispondenti superficie, avremo allora

$$X_i = x_i \cos w + \xi_i \operatorname{sen} w$$

dove in w entra una costante arbitraria additiva.

Vogliamo ora interpretare questi fatti in metrica euclidea; preso un punto (x_i) dello spazio ellittico poniamo $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$ dove gli assi delle x, y, z formino un triedro trirettangolo; un punto per cui $x_4 = 0$ rappresenta un punto del piano all'infinito e i valori di x_1, x_2, x_3 danno i coseni di direzione corrispondenti; osserviamo che la metrica sul piano all'infinito essendo relativa alla conica $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, essa coincide con l'analoga del piano $x_4 = 0$ nello spazio curvo, che è riferita alla conica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Cosicchè la coppia di elementi $e\,du^2 \pm 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ del piano $x_4 = 0$ corrisponde alla coppia stessa di elementi lineari per la sfera dello spazio piano se per un momento facciamo corrispondere un punto A del piano $x_4 = 0$ a quel punto della sfera che determina la direzione corrispondente nella suddetta proiettività al punto 'A. L'assoluto resta poi mutato nella sfera immaginaria

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

cosicchè abbiamo infine:

Data una coppia di elementi sferici $e\,du^2 \pm 2f\,du\,dv\,g\,dv^2$ con f costante, le rette parallele al raggio determinato dal punto di mezzo di uno degli archi terminati a una coppia di punti A, A′ *corrispondenti, e passanti per un punto* B *posto sul diametro normale a quest'arco e distante dal centro della sfera di* tang. $\frac{\varphi}{2}$ *(dove φ sia la distanza dei punti* A, A′*) genera una congruenza* W, *i cui piani focali sono antipolari rispetto alla sfera stessa.*

§. 21. Ritornando allo spazio curvo, daremo alcuni esempii semplici di questi teoremi, che ci condurranno anche a interessanti conseguenze.

Il problema di determinare le sviluppabili dello spazio ellittico è equivalente a quello di determinare i nostri elementi sferici per cui $\theta(\beta) = \beta$ cioè $f = g = 1$ cioè gli elementi $e du^2 + 2\, du\, dv + dv^2$; poniamo $u' = u$, $v' = u + v$; questo elemento diventa l'altro

$$(e - 1)\, du'^2 + dv'^2$$

cioè quello relativo alle superficie canali dello spazio piano che, come si deduce dalle formule di Weingarten o da quelle di Codazzi hanno costante o la e o la g purchè si scelga opportunamente il parametro del corrispondente linea di curvatura; del resto è cosa nota che tutte le sviluppabili dello spazio ellittico sono conosciute.

Un altro caso ben più interessante è quello, per cui $w_1 - w_2 = \text{cost.}$, perchè le evolute di una tal superficie sono superficie pseudosferiche complementari; l'angolo delle immagini sferiche delle linee di curvatura dovendo (§. 19) essere costante, il problema della determinazione di tali superficie è identico al problema di determinare gli elementi sferici della forma

$$e\, d\alpha^2 + 2\, d\alpha\, d\beta + \frac{K^2}{e}\, d\beta^2$$

con K costante, ossia della forma

$$e^{-2\tau}\, d\alpha^2 + 2 \cos \sigma\, d\alpha\, d\beta + e^{2\tau}\, d\beta^2$$

dove σ è costante (complemento di $\pm (w_1 - w_2)$).

La torsione geodetica di un elemento d'una tal superficie è proporzionale così a $\frac{d\alpha\, d\beta}{ds^2}$; di più osserviamo che il nostro risultato si può enunciare:

Per trovare tutti i sistemi di linee che dividono la sfera in ∞^2 parallelogrammi infinitesimi equivalenti basta trovare le immagini di Clifford della più generale congruenza normale pseudosferica dello spazio curvo.

Confrontando questi risultati ottenuti su tali elementi lineari sferici con quelli ottenuti dal prof. Bianchi nella sua memoria del T. XVIII degli *Annali di matematica* (1890) si ottengono alcune conseguenze a mio parere notevoli.

Il prof. Bianchi vi dimostra che ogni elemento sferico

$$(\alpha) \qquad ds^2 = H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv$$

con

$$(\beta) \qquad \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial v}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right)$$

dove σ sia costante è l'elemento lineare della immagine sferica di una congruenza pseudosferica euclidea riferita alle linee corrispondenti alle assintotiche delle falde focali; e che posto

$$\tau = \int\left(\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}du + \operatorname{cotg}\frac{\sigma}{2}\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}dv\right)$$

si può porre

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} e^{\tau}\left(H_1 \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}du + H_2\cos\frac{\sigma}{2}dv\right) = \operatorname{sen}\sigma\, d\alpha \\ e^{-\tau}\left(H_1 \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}du - H_2\cos\frac{\sigma}{2}dv\right) = \operatorname{sen}\sigma\, d\beta \end{cases}$$

cioè

$$(\delta) \qquad \begin{cases} H_1\, du = \cos\frac{\sigma}{2}\left(e^{-\tau}d\alpha + e^{\tau}d\beta\right) \\ H_2\, dv = \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\left(e^{-\tau}d\alpha - e^{\tau}d\beta\right) \end{cases}$$

cosicchè l'elemento (α) si può anche scrivere

$$(\varepsilon) \qquad ds^2 = e^{-2\tau}d\alpha^2 + 2\cos\sigma\, d\alpha\, d\beta + e^{2\tau}d\beta^2$$

dove le $\alpha =$ cost. $\beta =$ cost. sono le traiettorie ortogonali delle immagini piane delle sviluppabili della congruenza; e che viceversa ogni elemento (ε) si può porre sotto la forma (α), dove sussista (β). Di più detti 2θ, 2ω gli angoli tra le assintotiche sulle due falde focali della suddetta congruenza pseudosferica, si ha che:

$$(\zeta) \qquad H_1 = \frac{\cos(\theta+\omega)}{\cos\frac{\sigma}{2}}, \quad H_2 = \frac{\cos(\theta-\omega)}{\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}}$$

dove

$$(\eta) \quad \frac{\partial(\theta-\omega)}{\partial u} = \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos(\theta+\omega) \ , \quad \frac{\partial(\theta+\omega)}{\partial v} = -\operatorname{cotg}\frac{\sigma}{2}\cos(\theta-\omega) .$$

Ora noi abbiamo fatto l'osservazione che quando il coefficiente di $du\,dv$ è costante, e il coefficiente di du^2 è funzione del coefficiente di dv^2, l'elemento lineare resta sferico mutando il segno di f.

E ci proponiamo così la questione seguente:

Qual relazione geometrica passa tra le due congruenze W *determinate secondo il metodo del prof. Bianchi partendo dall'elemento* (ε) *e dall'elemento*

$$(\varepsilon') \qquad e^{-2\tau}\,d\alpha^2 - 2\cos\sigma\,d\alpha\,d\beta + e^{2\tau}\,d\beta^2$$

che se ne deduce mutando il segno di $\cos\sigma$?

L'elemento (ε') si deduce da (ε) mutando σ in $\pi-\sigma$; cosicchè l'elemento (α') che si deduce da (ε') come (α) da (ε) sarà

$$(\alpha') \qquad ds^2 = \mathrm{E}\,du'^2 + \mathrm{G}\,dv'^2$$

e avranno luogo le relazioni:

$$(\delta') \qquad \begin{cases} \sqrt{\mathrm{E}}\,du' = \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\,(e^{-\tau}\,d\alpha + e^{\tau}\,d\beta) \\ \sqrt{\mathrm{G}}\,dv' = \cos\frac{\sigma}{2}\,(e^{-\tau}\,d\alpha - e^{\tau}\,d\beta) \end{cases}$$

$$(\zeta') \qquad \sqrt{\mathrm{E}} = \frac{\cos(\theta_1+\omega_1)}{\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}} \ , \quad \sqrt{\mathrm{G}} = \frac{\cos(\theta_1-\omega_1)}{\cos\frac{\sigma}{2}}$$

dove gli angoli θ_1 ω_1 soddisfanno alle

$$(\eta') \quad \frac{\partial(\theta_1+\omega_1)}{\partial v'} = -\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos(\theta_1-\omega_1) \ , \quad \frac{\partial(\theta_1-\omega_1)}{du'} = \operatorname{cotg}\frac{\sigma}{2}\cos(\theta_1+\omega_1).$$

Le $(\delta)'$ confrontate con le (δ) ci dicono che u' è funzione della sola u e v' della sola v; confrontando i valori di

$$e^{-\tau}\,d\alpha \pm e^{\tau}\,d\beta$$

ricavati dalle (δ), (δ') e ricordando le (ζ), (ζ') si ottiene

$$(\theta)\qquad \begin{cases} \cot\frac{\sigma}{2}\cos(\theta_1+\omega_1)\,du' = \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos(\theta+\omega)\,du \\ \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos(\theta_1-\omega_1)\,dv' = \cot\frac{\sigma}{2}\cos(\theta-\omega)\,dv. \end{cases}$$

Nei secondi membri di $(\eta)'$ portiamo i valori dati dalle (θ) e quindi poniamo per $\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos(\theta+\omega)$ e per $\cot\frac{\sigma}{2}\cos(\theta-\omega)$ i valori ricavati dalle (η). Otterremo

$$(\varkappa)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\theta_1+\omega_1)}{\partial v'} = \dfrac{\partial(\theta+\omega)}{\partial v}\dfrac{dv}{dv'} \\ \dfrac{\partial(\theta_1-\omega_1)}{\partial u'} = \dfrac{\partial(\theta-\omega)}{\partial u}\dfrac{du}{du'}. \end{cases}$$

È quindi naturale porre

$$\theta_1(u',v') = \theta(u,v)\ ;\ \omega_1(u',v') = \omega(u,v)$$

che per le (θ) danno

$$(\lambda)\qquad u' = u\operatorname{tg}^2\frac{\sigma}{2}\ ,\ v' = v\cot^2\frac{\sigma}{2}$$

e quindi

$$(\mu)\qquad \begin{cases} \theta_1(u',v') = \theta(u,v) = \theta\left(u'\cot^2\frac{\sigma}{2},\ v'\operatorname{tg}^2\frac{\sigma}{2}\right) \\ \omega_1(u',v') = \omega(u,v) = \omega\left(u'\cot^2\frac{\sigma}{2},\ v'\operatorname{tg}^2\frac{\sigma}{2}\right). \end{cases}$$

E del resto si verifica subito che questi valori di θ_1 e di ω_1, soddisfanno alle (η') e allora per i teoremi del prof. Bianchi e per le (ζ') si ha l'elemento sferico (α') che si deduce da (ε') nel modo stesso che (ε) da (α).

Le (μ) danno appunto il seguente teorema:

Le immagini di Clifford di una congruenza normale pseudosferica dello spazio curvo riferita alle sviluppabili ammettono come elementi lineari gli elementi lineari delle immagini sferiche di due congruenze pseudosferiche dello spazio piano, riferite alle traiettorie ortogonali delle sviluppabili (che quindi si corrispondono sulle due congruenze); le falde focali di una delle due congruenze sono trasformate di Lie delle falde focali dell'altra; e la trasformazione di Lie per cui si passa dalle une alle altre è subito determinata appena sia data una delle due congruenze.

Così la geometria dello spazio ellittico dà una interpretazione geometrica di una qualunque trasformazione di Lie applicata a una superficie pseudosferica, quando questa si immagini come falda focale di una opportuna congruenza pseudosferica. E la più generale trasformazione di Bäcklund per lo spazio piano si ottiene così dalla sola trasformazione complementare dello spazio ellittico, mentre la trasformazione di Lie nasce di per sè stessa per il fatto del doppio senso del parallelismo. E, con un linguaggio meno corretto, noi vediamo sdoppiarsi la trasformazione di Bäcklund in una trasformazione complementare e in trasformazioni di Lie.

Notiamo ancora che da una congruenza pseudosferica dello spazio piano si ha tosto un elemento lineare sferico

$$e^{-2\tau}\, du^2 + 2 \cos \sigma\, du\, dv + e^{2\tau}\, dv^2 .$$

La sola risoluzione di un' equazione di Riccati basta per determinare l'elemento associato

$$e^{-2\tau}\, du^2 - 2 \cos \sigma\, du\, dv + e^{2\tau}\, dv^2$$

e quindi la più generale congruenza normale pseudosferica dello spazio curvo. Quindi:

Nota una congruenza pseudosferica dello spazio piano si hanno con la sola risoluzione di un'equazione di Riccati due superficie pseudosferiche complementari dello spazio curvo e un'altra congruenza pseudosferica dello spazio piano.

Viceversa sia data una superficie S dello spazio ellittico per cui $w_2 - w_1 = \text{cost}$, cioè una congruenza normale pseudosferica e si conoscano le linee bisettrici delle immagini piane delle sviluppabili. Si avrà allora un sistema ortogonale di linee tale che il doppio sistema delle sue traiettorie isogonali sotto un certo angolo dividono la sfera in parallelogrammi infinitesimi equivalenti. Con quadrature si ottiene (Bianchi loc. cit., §. 33) un sistema ciclico ortogonale alla sfera tale che gli assi dei suoi circoli formano una congruenza di Ribaucour a generatrice pseudosferica; donde si deduce una superficie pseudosferica e una sua deformazione infinitamente piccola e quindi una congruenza pseudosferica.

Così da una congruenza pseudosferica normale dello spazio curvo, cioè da una superficie dello spazio curvo, per cui sia

$$w_1 - w_2 = \text{cost}.$$

si deducono due congruenze pseudosferiche dello spazio euclideo e quindi una tetrade di superficie pseudosferiche dello spazio stesso, appena si conoscano le linee bisettrici delle immagini piane delle sviluppabili.

§. 22. Il quadro delle formule del §. 15 ci dà infine un'altra conseguenza.

Sia

$$ds^2 = H_1^2\, d\rho_1^2 + H_2^2\, d\rho_2^2 + H_3^2\, d\rho_3^2$$

l'elemento lineare dello spazio curvo riferito a un sistema triplo ortogonale e indichiamo con (X_1, X_2, X_3) $(Y_1\, Y_2\, Y_3)$ $(Z_1\, Z_2\, Z_3)$ i parametri di scorrimento delle normali rispettivamente alle $\rho_1 = \text{cost.}$, alle $\rho_2 = \text{cost.}$, alle $\rho_3 = \text{cost.}$ Avremo subito per il quadro di formule suddetto

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_k}{\partial \rho_k} &= -\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} X_i - \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_l} X_l \\ \frac{\partial X_k}{\partial \rho_i} &= \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_k} X_i \pm H_i\, X_l \\ \frac{\partial X_k}{\partial \rho_l} &= \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_l}{\partial \rho_k} X_l \mp H_l\, X_i \end{aligned}\right\} (i \neq k \neq l).$$

In queste formule, *da cui si dedurrebbero subito le relazioni che legano* $H_1 H_2, H_3$ il doppio segno è da attribuirsi al doppio senso del parallelismo; e fissato questo si ricordi che si prenderanno i segni superiori o i segni inferiori a seconda che $(i\,k\,l)$ è una permutazione pari ó dispari (dispari o pari).

Poichè risulta così $H_i^2 = \left(\sum X_l \frac{\partial X_k}{\partial \rho_i}\right)^2$ ecc. si ha:

Due sistemi tripli ortogonali corrispondentesi punto a punto con parallelismo in un verso del triedro fondamentale sono uguali tra loro.

Sulla rappresentazione Riemanniana di rette parallele e sulle superficie isocicliche.

23. Le formule che danno la trasformazione da coordinate di Riemann a coordinate di Weierstrass sono le seguenti:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{4}-(x^2+y^2+z^2)}{\frac{1}{4}+(x^2+y^2+z^2)}\;;\; x_2 = \frac{x}{\frac{1}{4}+x^2+y^2+z^2}\;;\; x_3 = \frac{y}{\frac{1}{4}+x^2+y^2+z^2}\;;\; x_4 = \frac{z}{\frac{1}{4}+x^2+y^2+z^2}.$$

Un piano generico è rappresentato dalla sfera dello spazio euclideo

$$x^2+y^2+z^2+a_1 x+a_2 y+a_3 z = \frac{1}{4}$$

con a_1, a_2, a_3 costanti arbitrarie; e tutte queste sfere tagliano secondo un circolo massimo la sfera

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{4}\,.$$

Un sistema di generatrici della sfera $x^2+y^2+z^2+\frac{1}{4}=0$ è dato da

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} x+\dfrac{i}{2}+\lambda\,(y-iz)=0 \\ y+iz-\lambda\left(x-\dfrac{i}{2}\right)=0\,. \end{cases}$$

Date due sfere

$$(\beta)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2+a_1\,x+a_2\,y+a_3\,z=\dfrac{1}{4} \\[2ex] x^2+y^2+z^2+a'_1x+a'_2y+a'_3z=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

per trovare a quali coppie di generatrici della sfera $x^2+y^2+z^2+\frac{1}{4}=0$ il cerchio (β) (immagine di una retta dello spazio curvo) si appoggia si sottragga da (β) la $x^2+y^2+z^2+\frac{1}{4}=0$; e dalle equazioni così ottenute e da (α) si eliminano x, y, z. Si otterrà per determinare λ

$$\begin{vmatrix} -1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ i & 1 & \lambda & -i\lambda \\ i\lambda & -\lambda & 1 & i \end{vmatrix}=0$$

Da cui si deduce:

Affinchè il cerchio (β) e il cerchio

$$x^2+y^2+z^2+a'_1\,x+a'_2\,y+a'_3\,z-\frac{1}{4}=0$$

$$x^2+y^2+z^2+b'_1\,x+b'_2\,y+b'_3\,z-\frac{1}{4}=0$$

si appoggino alla medesima coppia di generatrici di

$$x^2+y^2+z^2+\frac{1}{4}=0$$

deve essere

$$\begin{vmatrix} -1 & a_1 \\ -1 & b_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1 & a_2 \\ -1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1 & a_3 \\ -1 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & a'_1 \\ -1 & b'_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b'_2 & b'_3 \\ a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1 & a'_2 \\ -1 & b'_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b'_3 & b'_1 \\ a'_3 & a'_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -1 & a'_3 \\ -1 & b'_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b'_1 & b'_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{vmatrix}.$$

Quindi (§. 4).

Nella rappresentazione conforme dello spazio curvo rette parallele sono rappresentate da cerchi che si appoggiano a una stessa coppia di generatrici sghembe della sfera immagine dell'assoluto.

§. 23. Da ciò e da un teorema del prof. Bianchi più volte citato si deduce:

Le superficie generate da un cerchio che si muove, deformandosi o no, e appoggiandosi sempre a una stessa coppia di generatrici sghembe di una sfera $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ *ammettono la famiglia di questi cerchi come famiglia di curve isoterme.*

Questo teorema è generalizzabile; si ha infatti:

Tutte le superficie cerchiate di uno spazio piano, che ammettono la famiglia dei cerchi generatori come famiglia di curve isoterme si possono ottenere nella rappresentazione conforme su uno spazio piano degli spazii a curvatura costante come immagine delle rigate isoterme di questi ultimi spazii, cioè (Bianchi A) *come immagine delle rigate generate dalle binormali a una curva di torsione costante.*

Dimostrato questo teorema, si ha poi subito (poichè nelle rappresentazioni conformi di uno spazio non-euclideo su uno spazio piano i cerchi si mutano in cerchi, e le famiglie di curve isoterme in famiglie isoterme) che: *Tutte le superficie cerchiate di uno spazio qualunque a curvatura costante che ammettono i cerchi come famiglia di curve isoterme si deducono, con rappresentazioni conformi, dalle rigate luogo delle binormali a una curva di torsione costante di uno spazio pure a curvatura costante.*

In una bella memoria di Demartres [1]) si dimostra che il punto P d'intersezione della retta comune ai piani di due cerchi consecutivi e della retta unente i punti d'intersezione di uno di questi cerchi, e della proiezione dell'altro cerchio sul piano del primo è un punto fisso nello spazio. Preso poi un triedro mobile, la cui origine sia il centro di uno generico di questi cerchi e l'asse delle x passi per il

---

[1]) *Annales de l'École Normale Supérieure*, T. IV, 1887, pag. 145 e seg.

punto P, in modo che le coordinate del punto P siano $(\alpha, 0, 0)$ Demartres dimostrò pure che, se R è il raggio del cerchio stesso, il binomio $\alpha^2 - R^2$ è una costante. E allora tutto il resto della discussione di Demartres si può evitare con una semplicissima considerazione; consideriamo infatti la sfera T di centro P e raggio $\sqrt{R^2 - \alpha^2}$; poichè rispetto al triedro mobile l'equazione del cerchio corrispondente è

$$x^2 + y^2 = R^2 \ , \ z = 0$$

si verifica subito che questo cerchio taglia la nostra sfera in punti diametralmente opposti. Ora se noi rappresentiamo in modo conforme uno spazio a curvatura costante sullo spazio piano in modo che la sfera T rappresenti l'assoluto, i cerchi in discorso corrisponderanno a rette dello spazio curvo; e la nostra superficie cerchiata avrà per immagine nello spazio curvo una rigata, per cui le rette formano una famiglia isoterma; che è quanto si voleva dimostrare. Chiameremo con Demartres tali superficie, superficie *isocicliche;* avremo allora:

" *Il problema di costruire le superficie isocicliche degli spazii a curvatura costante (o in particolare dello spazio piano) coincide col problema di determinare tutte le curve a torsione costante di uno spazio a curvatura costante* ".

E allora ci restano da risolvere due questioni: l'una di trovare le formule effettive che permettano di passare da un problema all'altro; l'altra di interpretare questo teor. applicato allo spazio piano con la sola metrica euclidea; ciò che naturalmente è la cosa più interessante.

Sia dunque la superficie isociclica Σ dello spazio piano definita dalle due forme

$$ds^2 = E\,(du^2 + dv^2) \ , \ D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

e siano le $u =$ cost. i cerchi costituenti la solita famiglia isoterma. Sarà la curvatura assoluta $\frac{1}{\rho_u}$ delle $u =$ cost, funzione della sola u; la torsione delle $u =$ cost. sempre nulla. E detto σ l'angolo tra la

normale principale alle $u = \text{cost.}$ e la normale alla superficie in un punto generico, sarà

$$\frac{\cos\sigma}{\rho_u} = \frac{D''}{E} \ , \ \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho_u} = -\frac{1}{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u}$$

che, per quanto s'è detto, danno derivate rispetto a v

$$\frac{D''}{E}\frac{\partial\sigma}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u}\right) \tag{1}$$

$$\frac{1}{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D''}{E}\right) \tag{2}$$

col che le proprietà supposte danno

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D''^2 + \left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u}\right)^2}{D^2}\right) = 0 \ , \ \frac{D'}{E} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sigma}{\partial v} \tag{3}$$

mentre per le equazioni di Codazzi e di Gauss si ha:

$$D D'' - D'^2 = -\frac{E}{2}\left(\frac{\partial^2 \log E}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log E}{\partial v^2}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log E}{\partial v} D - \frac{1}{2}\frac{\partial \log E}{\partial v} D'' = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log E}{\partial u} D - \frac{1}{2}\frac{\partial \log E}{\partial u} D'' = 0. \tag{6}$$

La superficie Σ' immagine dello spazio curvo avrà per elemento lineare

$$ds'^2 = \frac{E}{\lambda^2}\,(du^2 + dv^2)$$

dove λ si determina osservando che le $u = \text{cost.}$ sono geodetiche, cosicchè

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial u}. \tag{7}$$

La seconda forma fondamentale di Σ' è, come si calcola subito,

$$D_1\, du^2 + 2\, D'_1\, du\, dv + D''_1\, dv^2 = -$$

$$= -\frac{\lambda\,(D\, du^2 + 2\, D'\, du\, dv + D''\, dv^2) + 2\, E\,(xX + yY + zZ)\,(du^2 + dv^2)}{\lambda^2}\,.$$

Ponendo per $Xx+Yy+Zz$ il valore che se ne ricava dalla [1] ρ_{12}–$D'W$ e ricordando che si può ammettere costante $\lambda - 2\rho$ se ne deduce (ricordando le (1) e (3)):

$$D_1\, du^2 + 2\, D'_1\, du\, dv + D''_1\, dv^2 = \frac{D'' - D}{\lambda}\, du^2 - 2\,\frac{D'}{\lambda}\, du\, dv\,.$$

E le $u =$ cost. riescono anche assintotiche, cioè appunto rette. Per trovare λ senza quadrature, si usi delle formule di Codazzi e di Gauss per la Σ'; se ne avrà $\frac{\lambda}{D'} =$ cost., e le formule di Codazzi e di Gauss stesse si ridurranno alle:

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right) = 0$$

$$(\beta) \qquad \frac{\partial \log \dfrac{D'' - D}{\sqrt{E}}}{\partial v} = 0$$

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right)^2 \left\{\left(\frac{D'}{\sqrt{E}}\right)^2 + \frac{\partial^2 \log\left(\dfrac{D'}{\sqrt{E}}\right)}{\partial v^2}\right\} = \text{cost.}$$

Le due prime di queste equazioni per le (2), (3), (5) sono conseguenza l'una dell'altra; se si riuscisse perciò a dimostrare direttamente una di queste due e la terza, si sarebbe dimostrato di nuovo, *e in modo diretto,* il nostro teorema.

La (α) dà per la (3)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u\, \partial v} = 0\,.$$

---

[1] BIANCHI. *(Lezioni,* Cap. IV, pag. 114).

Quindi: *In una superficie isociclica dello spazio piano consideriamo un quadrangolo formato da due cerchi e da due traiettorie ortogonali al sistema dei cerchi. Calcoliamo i valori di* σ (*angolo della normale alla superficie in un punto col piano del cerchio passante per il punto stesso*) *nei quattro vertici del quadrangolo; la somma dei valori che detto angolo riceve in due vertici opposti è uguale alla somma dei valori che riceve negli altri due vertici.*

Ma un risultato ben più notevole si deduce dalle (α), (β).

Esse ci dimostrano che il binomio differenziale

$$(D''-D)\,du - 2\,D'\,dv$$

ammette $\dfrac{1}{\sqrt{E}}$ come fattore integrante

ossia che

$$D_1\,du + 2\,D'_1\,dv = \frac{D''-D}{\lambda}\,du - 2\,\frac{D'}{\lambda}\,dv$$

ammette $\dfrac{\lambda}{\sqrt{E}}$ (che è noto appena sia dato l'elemento lineare della rigata isoterma) come fattore integrante. Dunque:

" *Sopra ogni superficie isociclica si trovano con sole quadrature le assintotiche della corrispondente rigata isoterma; sopra ogni rigata luogo delle binormali a una curva di torsione costante le assintotiche si determinano con quadrature* ".

Quest'ultimo teorema ha una elegante spiegazione geometrica: si sa che su ogni rigata le assintotiche si determinano per mezzo di una equazione di Riccati; basta dunque conoscere un'assintotica, perchè le altre siano determinabili con quadrature.

Se noi confrontiamo la costruzione data dal Darboux (T. III, Cap. XIV) dell'immagine euclidea conforme di una superficie dello spazio curvo con la costruzione data dal Demartres per le superficie isocicliche, otteniamo il seguente teorema che permette appunto di costruire una e quindi tutte le assintotiche di una rigata isoterma con sole quadrature:

“ *Proprietà caratteristica delle rigate formate dalle binormali a una curva di torsione costante è che la sviluppabile formata dai piani tangenti alla rigata e all'assoluto abbia per spigolo di regresso un'assintotica della rigata.*

Ultimo problema da risolvere è quello di interpretare nella metrica euclidea i risultati ora ottenuti per le superficie isocicliche dello spazio piano. Ricordando i teoremi del §. 8, a cui appunto io giunsi per risolvere questa questione, abbiamo subito:

Il problema di trovare le superficie isocicliche dello spazio piano equivale a quello di trovare quelle coppie di curve a torsione costante ma distinta, dello spazio stesso, che si corrispondono punto a punto con uguaglianza di arco e di prima curvatura. La trasformazione di Razzaboni per queste dà una trasformazione delle superficie isocicliche.

Osservazioni varie e aggiunte.

Oltre alle questioni e agli esempii trattati nel presente lavoro, altri problemi ci si potrebbe proporre; p. es. di dare le forme tipiche degli elementi lineari delle immagini di Clifford di congruenze particolari (pseudosferiche, ecc.). Tutte questioni che risultano nello spazio ellittico assai più facili da trattarsi che le corrispondenti nello spazio piano a causa della proprietà già dimostrata che le immagini di Clifford determinano una congruenza. Noi perciò abbiamo solo risoluto, con processi però indiretti e di grandissima semplicità solo i casi più importanti di riconoscere cioè, dalle loro immagini, le congruenze normali e le congruenze W; abbiamo però sempre supposte le immagini di Clifford non degeneri. Che se una di queste fosse degenere allora affinchè la congruenza fosse normale sarebbe necessario che fosse degenere anche l'altra e si avrebbe la congruenza delle normali a una superficie di curvatura nulla, come già sappiamo. Ma possiamo dire di più:

“ *Se una sola delle immagini di Clifford si riduce a una curva* C, *la congruenza è* W *allora e allora soltanto che o la* C *è una retta o le linee dell'altra immagine corrispondenti ai punti di* C *sono geo-*

deticamente parallele; se tutte e due le immagini di Clifford sono degeneri allora la congruenza è W, *ed è normale a una superficie a curvatura nulla* „.

Quest' ultimo teorema dà una nuova proprietà proiettiva " *caratteristica* „ delle congruenze normali a una superficie a curvatura nulla; mentre finora si era dimostrata che l'avere le immagini degeneri era proprietà che distingueva queste congruenze soltanto dalle congruenze normali.

Questi teoremi si dimostrano subito: se le α, β, γ del §. 12 sono funzioni della sola " u „, l'uguaglianza del §. 12 diventa:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial\alpha}{\partial u} & \frac{\partial\beta}{\partial u} & \frac{\partial\gamma}{\partial u} \\ \frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\beta}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\gamma}{\partial p^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha_1}{\partial v} & \frac{\partial\beta_1}{\partial v} & \frac{\partial\gamma_1}{\partial v} \\ \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2\beta^2}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2\gamma_1}{\partial u\partial v} \\ \frac{\partial^2\alpha_1}{\partial v^2} & \frac{\partial^2\beta_1}{\partial v^2} & \frac{\partial^2\gamma_1}{\partial v^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Se è nullo il primo di questi due determinanti, allora α, β, γ sono legati da una relazione lineare e la curva C è una retta; se è nullo il secondo si riconosce tosto coi procedimenti del §. 12 che le $v =$ cost. risultano geodeticamente parallele.

Infine se α, β, γ, sono funzioni della sola v, cioè se tutte e due le immagini di Clifford si riducono a una linea, è ben chiaro che la congruenza corrispondente è W, perchè il secondo dei due determinanti precedenti si annulla; anzi la congruenza è proprio normale come si riconosce con ragionamenti analoghi a quelli del §. 16 e come ci si può anche convincere geometricamente.

Un' altra cosa da notare nel presente lavoro è forse la definizione dell'angolo di due rette sghembe; credo perciò non inutile il darne un' altra definizione equivalente, indipendentemente da ogni concetto di parallelismo.

Siano a, b le due rette e, ciò che non scema la generalità, sia a la retta che unisce il punto $(1, 0, 0, 0)$ al punto $(0, 0, 0, 1)$; e le perpendicolari comuni alla a e alla b siano la retta β che va dal

punto (1, 0, 0, 0) al punto (0, 1, 0, 0) e la retta γ che da (0, 0, 0, 1) va al punto (0, 0, 1, 0). La retta b stacchi sulle rette β, γ a partire dai punti (1, 0, 0, 0) e (0, 0, 0, 1) rispettivamente segmenti di lunghezza φ, f; la retta b sarà la retta che unisce il punto $(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, 0, 0)$ al punto $(0, 0, \operatorname{sen} f, \cos f)$. E allora è facile costruire i parametri di scorrimento delle a, b; e se con w indichiamo l'angolo di queste due rette, sarà, come subito si vede, $\cos w = \cos(\varphi \pm f)$ a seconda del verso in cui l'angolo è misurato. Quindi:

Il coseno dell'angolo di due rette sghembe è uguale al coseno della somma o della differenza della loro minima e massima distanza, a seconda del senso in cui vien misurato.

E ne discende subito il teorema tante volte citato che l'angolo di due rette ammette una sola determinazione allora e allora soltanto che le due rette sono complanari.

Voglio qui notare espressamente che in tutto questo lavoro si è lasciata sempre impregiudicata la questione dell'orientazione di una retta e quindi della precisa determinazione dell'angolo di due rette sghembe; questa maggior precisione fu per noi sempre inutile e si potrebbe del resto stabilire facilmente.

Devo inoltre aggiungere che io avevo già finito il presente lavoro, quando il prof. Bianchi mi comunicò che il sig. Study *(Ueber Nicht-Euklidische und Linien-Geometrie;* Greisfwald 1900 pag. 73-79) aveva trattato del parallelismo di Clifford. In queste pagine il signor Study partendo da punti di vista puramente geometrici enuncia e dà alcuni semplicissimi corollari dei seguenti due teoremi:

" L'insieme delle coppie di rette polari dello spazio curvo si può riferire all'insieme delle coppie di rette formate da una retta di una stella fissa e da una retta di un'altra stella fissa dello spazio piano; alle rotazioni dell'una o dell'altra di queste stelle corrispondono gli scorrimenti nell'uno o nell'altro verso dello spazio piano ".

" L'insieme delle rette orientate dello spazio ellittico si può immaginare riferito biunivocamente alle coppie di punti di una sfera euclidea, in modo che ai movimenti di una o dell'altra delle immagini corrispondono scorrimenti in un senso o nell'altro ".

L'applicazione dei nostri principii allo spazio iperbolico porterebbe a formule complicate di immaginarii; lo studio diretto del parallelismo di Lobatschewsky non sarebbe certo così simmetrico, perchè nello spazio iperbolico i due sensi secondo cui si possono tirare rette parallele non sono come per lo spazio ellittico ben distinti l'uno dall'altro.